

ANÁLISE DE ESTRUTURAS NO ESTADO  
PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES  
COM MATERIAIS ELÁSTICOS, ORTÓTRO-  
POS E NÃO LINEARES

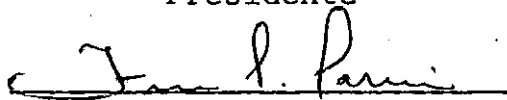
Artur Obino Neto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO  
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN  
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



Presidente





RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
FEVEREIRO DE 1975

AGRADECIMENTOS

A todos que colaboraram na elaboração deste trabalho;

A Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia (COPPE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e

Ao Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq) pelas bolsas de estudo concedidas.

SINOPSE

Este trabalho de Tese consiste na análise de estruturas segundo uma Teoria da Elasticidade Não Linear com respeito as propriedades dos materiais. O princípio da estacionaridade da energia é utilizado com condições de elasticidade mais fracas que a Lei de Hooke Generalizada.

Para a resolução de problemas de estado plano de Tensões ou Deformações é utilizado o método dos elementos finitos. Sendo que este enfoque recai na resolução de um sistema de equações não lineares, portanto é necessário um processo incremental-iterativo para resolução do mesmo.

Aplicou-se o trabalho a estruturas de concreto supondo que este material funcionasse segundo lei proposta pelo C.E.B.. A análise é feita até a rotura, que na compressão admitia a envoltória de Coulomb-Mohr, enquanto que na tração era suposto o critério de máxima tensão.

ABSTRACT

The present dissertation deals with structural analysis for elastic-materials with non-linear constitutive equations. The principle of stationary energy is shown under weaker conditions than the usual assumption of a generalized Hooke's law.

The finite element method is used for solving plane stress and plane strain problems. This method leads to a system of non-linear equations, which requires an incremental-iterative procedure to achieve the solution.

The theory is applied to concrete structures, assuming that the material behaves according to the C.E.B. standards. The analysis was performed increasing the external forces until the collapse of the structure, assuming the Coulomb-Mohr covering for compression and the maximum stress criterion for tension stresses.

INDICE

NOTAÇÃO . . . . .	vi
I - INTRODUÇÃO . . . . .	1
II - ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE . . . . .	4
2.1 - Objetivo . . . . .	4
2.2 - Equações de Equilíbrio . . . . .	4
2.3 - Equações Cinemáticas . . . . .	5
2.4 - Teorema do Trabalho . . . . .	7
2.5 - Condição de Estabilidade do Material . . . . .	8
2.6 - Elasticidade . . . . .	10
2.7 - Teoremas de Minimização . . . . .	12
III - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS ELÁSTICOS, ESTAVEIS E ORTÓTROPOS . . . . .	16
3.1 - Propriedades das Equações Constitutivas . . . . .	16
3.2 - Representação Clássica dos Coeficientes da Matriz Constitutiva . . . . .	19
3.3 - Equações Constitutivas para o Estado Plano de Tensões . . . . .	24
3.4 - Equações Constitutivas para o Estado Plano de Deformações . . . . .	27
IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADOS AO COMPORTA- MENTO NÃO LINEAR DO MATERIAL . . . . .	31
4.1 - Fundamentos Teóricos do Método . . . . .	31





4.2 - Método dos Elementos Finitos para Estado Pla-	
no de Tensões ou de Deformações . . . . .	36
V - PROGRAMA AUTOMÁTICO . . . . .	46
5.1 - Considerações Gerais sobre o programa . . . . .	46
5.2 - Subrotinas dos Dados . . . . .	47
5.3 - Subrotinas Retiradas da Referência 11 . . . . .	47
5.4 - Programa Principal. . . . .	48
5.5 - Subrotina INCRE . . . . .	51
5.6 - Subrotina NOLIN . . . . .	52
VI - APLICAÇÕES A ESTRUTURAS DE CONCRETO EM ESTADO PLANO	
DE TENSÕES OU DE DEFORMAÇÕES . . . . .	53
6.1 - Equações Constitutivas do Concreto . . . . .	53
6.2 - Estados Limites do Concreto . . . . .	56
6.3 - Aplicação I . . . . .	59
6.4 - Aplicação II . . . . .	64
6.5 - Aplicação III . . . . .	74
VII - CONCLUSÕES . . . . .	88
BIBLIOGRAFIA . . . . .	91
APÊNDICE A . . . . .	93
APÊNDICE B . . . . .	95

NOTAÇÃO

$A$	Operador diferencial para as equações cinemáticas
$A_{ri}$	Componentes da matriz do operador
$B_{rj}$	Componentes da matriz que relaciona os deslocamentos nodais com as deformações
$C_{ij}$	Componentes da matriz que relaciona as tensões com as deformações
$E, E_i$	Módulos longitudinais secantes
$e_i$	Componentes do vetor das deformações
$e_c$	Deformação máxima do concreto antes de plastificar
$f, f'$	Funções
$f_j^e$	Vetor das cargas aplicadas aos nós de um elemento
$f_{ccd}$	Máxima tensão de cálculo à compressão do concreto
$f_{ctd}$	Máxima tensão de cálculo à tração do concreto
$F$	Núcleo da primeira variação de um funcional
$F'$	Núcleo da segunda variação de um funcional
$G, G_i$	Módulos transversais secantes
$k_{jl}^e$	Matriz de rigidez de um elemento
$K_{ij}$	Matriz de rigidez da estrutura
$n_i$	Componentes do vetor normal unitário
$N_{ij}$	Função de interpolação
$P$	Energia potencial das forças externas
$q_j$	Componentes do vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$q_j^n$	Componentes do vetor de deslocamentos nodais da estrutura após a $n$ ésima iteração
$Q_j$	Componentes do vetor cargas nodais na estrutura

$S_{ij}$	Componentes da matriz que relaciona as deformações com as tensões
$T$	Energia potencial total
$T_i$	Trabalho interno de um campo de tensões p/um campo de deformações.
$T_e$	Trabalho das forças externas
$u_i$	Componentes do vetor deslocamento do corpo
$\bar{u}_i$	Componentes do vetor deslocamento prescrito na fronteira do corpo
$u_i$	Componentes do vetor deslocamento do corpo após a enésima solução.
$u_i^*$	Componentes do vetor deslocamento solução
$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial u_j}$	Derivadas do vetor deslocamentos em relação as coordenadas cartesianas
$U$	Energia potencial de deformação
$U^*$	Energia complementar de deformação
$V$	Domínio do corpo
$V_e$	Domínio do elemento
$W$	Densidade de energia de deformação
$W^*$	Densidade de energia complementar de deformação
$x_i$	Coordenadas cartesianas
$X_j$	Componente do vetor das forças de massa por unidade de volume
$\beta_i^n$	Fator de aceleração para a convergência
$\delta$	Primeira variação
$\delta^2$	Segunda variação
$\epsilon_{ij}$	Componentes do tensor das deformações
$\eta$	Função variação
$\sigma_i$	Componente do vetor das tensões



$\sigma_{ij}$	Componentes do tensor das tensões
$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$	Derivadas do tensor das tensões em relação às coordenadas cartesianas
$\sigma_{uj}$	Componentes do vetor das tensões prescritas na fronteira
$\sum_1$	Fronteira com tensões prescritas
$\sum_2$	Fronteira com deslocamentos prescritos
$\nu, \nu_i, \nu_{ij}$	Coeficientes de Poisson
$\longleftrightarrow$	Se somente se
$\implies$	Acarreta
$\exists$	Existe pelo menos um
$\forall$	Qualquer que seja
$\in$	Pertencente
$(\ )$	Tensor
$[ \ ]$	Matriz
$\{ \ }$	Vetor
$\langle , \rangle$	Produto interno
$ \cdot $	Norma de um espaço de energia
$  \cdot  $	Norma de um espaço de Hilbert
$ \cdot _k$	Semi-norma de ordem k
	Saída do computador
	Chamada de subrotina
	Comando iterativo
	Comando condicional

## I - INTRODUÇÃO

Na formulação da Teoria Matemática da Elasticidade para problemas estáticos da Mecânica do Contínuo, ocorrem 3 tipos de equações:

- 1) Equações de Equilíbrio no interior do corpo e na fronteira onde existem tensões prescritas.
- 2) Equações Cinemáticas nas quais as deformações são relacionadas com os deslocamentos no interior do corpo ou então, os deslocamentos são prescritos na fronteira.
- 3) Equações Constitutivas onde o campo de deformações está relacionado ao campo de tensões, sendo que essas equações dependem essencialmente do tipo de material do corpo elástico analisado.

A linearização da Teoria da Elasticidade é feita em 2 níveis distintos:

- 1) Linearização das Equações Cinemáticas que acarreta uma invariância na geometria do corpo analisado antes e após as solicitações. Esta hipótese é mostrada detalhadamente por Novozhilov [ref.1].
- 2) Linearização das Equações Constitutivas, que caracteriza-se pela aplicação da Lei de Hooke Generalizada.

No presente trabalho apresenta-se somente o primeiro nível de linearização (Linearidade Geométrica); logo os problemas analisados apresentarão uma Não Linearidade Física ou de Material.

Embora este tipo de análise (não linear) utilizando o método dos Elementos Finitos seja encontrado em alguns trabalhos [ref. 2,3,4 e 5]; tomou-se como base a [ref. 6]. Nesta referência são apresentados vários processos para a resolução de sistemas de equações não lineares: incremental, iterativo e misto. Aqui, utiliza-se o método misto (incremental e iterativo), pois este permite o conhecimento de resultados parciais (método incremental) e também de uma solução com a aproximação função de um erro pré-estabelecido (método iterativo).

Torna-se, então, necessário conhecer resultados básicos da Teoria da Elasticidade, como o Teorema da Mínima Energia Potencial Total, sem "a priori" introduzir a Lei de Hooke generalizada. (Cap. II).

Quanto a obtenção das equações constitutivas para um material de comportamento não linear, foi seguida a orientação dada por Calcote [ref.8], para problemas de estado plano de tensões. (Cap. III).

Para a resolução do sistema de equações não lineares desenvolveu-se um algoritmo baseado no trabalho de Iakvlev [ref.9], sendo que a convergência da solução é mostrada através dos resultados apresentados por Oden [ref.10]. (Cap. IV).

Com base nas considerações feitas acima adaptou-se, para uma análise não linear, o programa automático da [ref.11] e algumas aplicações a estruturas de concreto são apresentadas no Capítulo VI. Deve ficar claro que soluções mais reais só poderão ser obtidas utilizando-se equações constitutivas ajusta

das às curvas experimentais, como as descritas por Kupfer [ref. 12 e 13].

Quanto a hipótese de ortotropia, admitida ao nível de cada elemento, resulta da simplificação de considerar a curva tensão-deformação do CEB do estado de compressão simples válida segundo as direções principais. Esta consideração equivale a uma simplificação da real anisotropia do concreto em estado múltiplo de tensão.

## II - ALGUNS RESULTADOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

### 2.1 - OBJETIVO

Na utilização de métodos diretos para a minimização de funcionais, que solucionem problemas da Teoria da Elasticidade é necessário conhecer alguns resultados como o Teorema ' da Energia Potencial Total.

Neste capítulo quer-se demonstrar sucintamente este teorema e principalmente analisar as hipóteses fundamentais necessárias para este objetivo; de forma que não seja imposto, "a priori", a Linearidade das Equações Constitutivas.

É importante observar que o comportamento elástico dos materiais será uma hipótese básica, porém segundo condições mais fracas que a Lei de Hooke Generalizada.

Da referência [7] tem-se os seguintes resultados:

### 2.2 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Equilíbrio interno das forças aplicadas ao elemento infinitesimal de um corpo deformável.

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \quad i \text{ e } j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$\sigma_{ij}$  - componente do tensor das tensões

$X_j$  - forças de massa por unidade de volume aplicadas ao corpo.

Equilíbrio interno dos momentos aplicados ao elemento infinitesimal do corpo, supondo que não há momentos distribuídos no seu volume:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.2)$$

Conclui-se, então, que o tensor das tensões é simétrico e também demonstra-se que existem eixos ortogonais nos quais anulam-se as componentes de índices desiguais; estes eixos são denominados de principais.

Equilíbrio para tensões prescritas na fronteira do corpo:

$$\sigma_{nj} = \sigma_{ij} \cdot n_i \quad \text{em} \quad \bigcup_1 \quad (2.3)$$

$\sigma_{nj}$  - componente do vetor das tensões prescritas na fronteira.

$n_i$  - componentes do vetor normal unitário à fronteira do corpo segundo a direção  $\underline{i}$ .

$\bigcup_1$  - fronteira com tensões prescritas.

### 2.3 - EQUAÇÕES CINEMÁTICAS

Estas equações, como já foi mencionado, relacionam os deslocamentos e as deformações:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) \quad (2.4)$$

$\epsilon_{ij}$  - componente do tensor das deformações

$u_i$  - componente do vetor dos deslocamentos do corpo na direção  $\underline{i}$ .

De (2.4) mostra-se:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji} \quad (2.5)$$

Portanto, o tensor das deformações é simétrico e apresenta eixos principais analogamente ao tensor das tensões.

Uma das linearizações da Teoria da Elasticidade é feita ao desprezar-se os termos de 2ª ordem na expressão (2.4), isto é, supõe-se as deformações e rotações da mesma ordem e ambas desprezíveis frente a unidade; pode-se mostrar [ref.1] que o domínio e a fronteira do corpo são tratadas como invariantes ; então, (2.4) transforma-se em:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.6a)$$

Ao escrever estas equações será suposta implicitamente a integrabilidade do campo de deformações com respeito aos deslocamentos, isto é, existe o campo de deslocamentos capaz de gerar o de deformações. As relações entre deformações e deslocamentos apresentarão portanto, uma Linearidade Geométrica.

A prescrição de valores de deslocamentos na

fronteira  $\tilde{e}$ :

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em} \quad \int_2 \quad (2.6b)$$

$u_i$  - vetor de deslocamentos prescritos na fronteira.

$\int_2$  - fronteira com deslocamentos prescritos.

#### 2.4 - TEOREMA DO TRABALHO

Das equações de equilíbrio e cinemáticas demonstra-se:

$$T_I = T_e$$

$$T_I = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2.7)$$

$T_I$  - trabalho interno do campo de tensões por um campo de deformações.

$V$  - domínio do corpo

$$T_e = \int \int_1 \sigma_{n_i} \cdot u_i d \int_1 + \int_V X_i \cdot u_i dV$$

$T_e$  - trabalho das forças externas que equilibram o campo  $\sigma_{ij}$  por um campo de deslocamento, compatíveis com as ligações, que gera  $\epsilon_{ij}$ .



É importante observar que as seguintes afirmações são demonstráveis:

$$a) \begin{matrix} E & E \\ E & C \end{matrix} \rightarrow T \ T$$

$$b) \begin{matrix} E & C \\ T & T \end{matrix} \rightarrow E \ E$$

$$c) \begin{matrix} E & E \\ T & T \end{matrix} \rightarrow E \ C$$

E E - equações de equilíbrio

E C - equações cinemáticas

T T - teorema do trabalho

## 2.5 - CONDIÇÃO DE ESTABILIDADE DO MATERIAL

Seja um corpo submetido a um estado de equilíbrio e  $\delta X_i$  e  $\delta \sigma_{n_i}$  componentes de vetores que são forças exteriores adicionais ao equilíbrio originando um campo de tensões ( $\delta \sigma_{ij}$ ); seja, também,  $\delta u_i$  componente do vetor de deslocamentos não identicamente nulos compatíveis com as ligações externas do corpo gerando um campo de deformações ( $\delta \epsilon_{ij}$ ), denominados 'de deslocamentos virtuais.

De (2.7), tem-se:

Trabalho externo realizado:

$$T_e = \int_V X_i \cdot u_i \, dV + \int \left. n_i \cdot u_i \, d \right\}_1$$

Trabalho interno realizado:

$$T_I = \int_V \delta \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \, dV$$

$$e, \quad T_I = T_e$$

Demonstra-se, então, [ref.14] :

a) Equilíbrio instável:

$$T_e = T_I < 0$$

b) Equilíbrio indiferente:

$$T_e = T_I = 0$$

c) Equilíbrio estável:

$$T_e = T_I > 0$$

A partir da condição de estabilidade de equilíbrio (c) ,  
tem-se:

$$T_I = \int_V \delta \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \, dV > 0$$

Estendendo-se a relação acima a qualquer volume infinitesimal do corpo (dV), tem-se o que denomina-se de estabilidade do material:

$$\delta \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} > 0$$

Pode-se, então, afirmar:

"Na evolução de um estado I e para um estado II de solicitações, com ligações compatíveis que impeçam deslocamentos rígidos virtuais, tem-se:

$$\int_I^{II} \Delta \sigma_{ij} \cdot \Delta \epsilon_{ij} > 0 \quad (2.8)$$

$$\Delta \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{II} - \sigma_{ij}^I$$

$$\Delta \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{II} - \epsilon_{ij}^I$$

$\sigma_{ij}^{II}$  - componente do tensor das tensões no estado II.

$\sigma_{ij}^I$  - idem, para o estado I.

$\epsilon_{ij}^{II}$  - componente do tensor das deformações no estado II.

$\epsilon_{ij}^I$  - idem, para o estado I."

## 2.6 - ELASTICIDADE

O material é elástico quando para um determinado estado de tensões existir uma relação unívoca (função  $W^*$ ) dos componentes do tensor das tensões tal que:

$$W^* = f(\sigma_{ij})$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.9)$$

Sendo definida a função (figura 2.1):

$$W = \sigma_{ij} \cdot \epsilon_{ij} - W^*$$

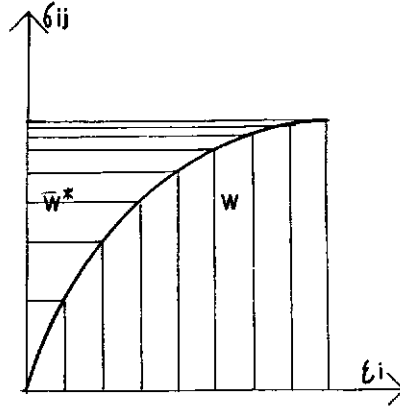


Figura 2.1: Representação uniaxial das funções  $W$  e  $W^*$

E como:

$$\frac{\partial W^*}{\partial \epsilon_{ij}} = 0,$$

tem-se:

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (2.10)$$

Logo:

$$W = f'(\epsilon_{ij})$$

Então sejam os funcionais:

$$U = \int_V W \, dV \quad (2.11)$$

$$U^* = \int_V W^* \, dV \quad (2.12)$$

$U$  - Energia (Potencial) de deformação

$U^*$  - Energia (Potencial) complementar de deformação

$E$ , denomina-se:

$W$  - Densidade de energia de deformação

$W^*$  - Densidade de energia complementar de deformação

Pode-se, portanto, concluir:

"O material elástico e estável acarreta uma correspondência biunívoca entre tensões e deformações".

Supõe-se que o corpo elástico está em um Estado Natural se não há solicitações exteriores e a energia de deformação é nula neste estado. Isto é:

$$\begin{aligned} W(\epsilon_{ij}) &\geq 0, \text{ sendo } W = 0 \iff \epsilon_{ij} = 0 \\ W^*(\sigma_{ij}) &\geq 0, \text{ sendo } W^* = 0 \iff \sigma_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.7 - TEOREMAS DE MINIMIZAÇÃO

O trabalho das forças exteriores para o corpo ir do estado I para o estado II, supondo este processo quasi estático, isto é, com pequenas acelerações dos deslocamentos ( $\delta u_i$ ), de (2.7), tem-se:

$$\begin{aligned} \Delta T_e = T_e^{II} - T_e^I &= \int_I^{II} \left[ \int_V X_i \cdot \delta u_i \, dV + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Sigma_1} \sigma_{ni} \cdot \delta u_i \, d \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta T_e = \Delta T_i &= \int_I^{II} \left[ \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} dV \right] = \\ &= \int_V \left[ \int_I^{II} \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \right] dV\end{aligned}$$

Utilizando (2.10):

$$\begin{aligned}\Delta T_e = \Delta T_i &= \int_V \left[ \int_I^{II} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \cdot \delta \epsilon_{ij} \right] dV = \\ &= \int_V \left[ \int_I^{II} \delta W \right] dV\end{aligned}$$

Sendo:

$$\Delta W = \int_I^{II} \delta W \quad \text{e} \quad \Delta U = \int_V \Delta W dV$$

Tem-se:

$$\Delta T_e = \Delta T_i = \Delta U$$

Pode-se, então, assumir que a variação de energia de deformação (  $\delta U$  ) é:

$$\delta U = \int_V \delta W \cdot dV = \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \cdot dV \quad (2.14)$$

Seja:

$$P = - \int_V X_i \cdot u_i \cdot dV - \int \left\{ \sigma_{n_i} \cdot u_i \cdot d \right\} \quad (2.15)$$

P - Energia potencial das forças externas

De (2.7) e (2.13):

$$\begin{aligned} \delta P &= - \int_V X_i \cdot \delta u_i \cdot dV - \int \left\{ \sigma_{n_i} \cdot \delta u_i \cdot d \right\} = \\ &= - \int_V \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \cdot dV \end{aligned}$$

De (2.14):

$$\delta P = - \delta U \quad (2.16)$$

Definindo:

$$T = P + U \quad (2.17)$$

T - Energia Potencial Total

Então, de (2.16):

$$\delta T = \delta P + \delta U = 0 \quad (2.18)$$

Usando as equações de equilíbrio (2.1), (2.2) e (2.3); a equação cinemática (2.6) e teorema do trabalho (2.7) ,

tem-se:

$$\delta^2 T = \int \delta \sigma_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \cdot dV$$

Da condição de estabilidade do material (2.8):

$$\delta^2 T > 0 \quad (2.19)$$

As relações (2.17), (2.18) e (2.19) permitem enunciar o Teorema da Energia Potencial Total:

"Entre todas soluções a que além de compatível for equilibrada, minimiza o funcional energia potencial total (T), isto é:

$$\delta T = 0 \quad \text{e} \quad \delta^2 T > 0 \quad ;$$

desde que verifiquem as hipóteses de:

Linearidade Geométrica (2.6),

Estabilidade do Material (2.8) e

Elasticidade (2.9). "

As hipóteses acima serão as utilizadas durante o trabalho.



### III - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MATERIAIS ELÁSTICOS, ESTÁVEIS E ORTÓTROPOS

#### 3.1 - PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Como foi visto no capítulo anterior, as relações (2.2) e (2.5) garantem a simetria dos tensores das tensões e das deformações. A partir destas propriedades pode-se escrever os componentes destes tensores em forma vetorial:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

Reescrevendo (2.9) e (2.10):

$$\sigma_i = \frac{\partial W}{\partial e_i} \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, 6$$

$$e_i = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_i} \quad (3.2)$$

A equação constitutiva pode ter a seguinte forma:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot e_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.3)$$

Admitindo que  $C_{ij}$  são coeficientes variáveis com o campo de deformações, estas equações são não lineares:

$$C_{ij} = f(e_k) \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.4)$$

Como foi visto no capítulo anterior a relação entre tensões e deformações é biunívoca, acarretando:

$$e_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad (3.5)$$

Onde:

$$S_{ij} = f'(\sigma_j) \quad (3.6)$$

A simetria dos coeficientes elásticos é mostrada na ref. [15], sob condições mais gerais que a assumida neste trabalho:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (3.7)$$

De (3.7) tem-se 21 elementos na matriz dos coeficientes elásticos:

$$\begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \text{Simétrico} & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Sendo o material ortótropo e os eixos coordenadas coincidentes com os eixos de ortotropia, segundo a [ref.7] , mostra-se que a matriz  $[C_{ij}]$  terá 9 elementos, a conhecer:

$$\begin{bmatrix} C_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Simétrico} & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

### 3.2 - REPRESENTAÇÃO CLÁSSICA DOS COEFICIENTES DA MATRIZ CONSTITUTIVA.

Comparando (3.3) com (3.4), tem-se:

$$[C_{ij}] = [S_{ij}]^{-1}$$

onde as relações entre os coeficientes será:

$$S_{ii} = \frac{C_{jj} C_{kk} - C_{jk}^2}{D}$$

$$S_{ij} = \frac{C_{ik} C_{jk} - C_{ij} C_{kk}}{D}$$

$$S_{\ell\ell} = \frac{1}{C_{\ell\ell}}$$

$$D = C_{11} C_{22} C_{33} - C_{11} C_{23}^2 - C_{22} C_{13}^2 - C_{33} C_{12}^2$$

$$\begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ j = 2, 3, 1 \\ k = 3, 1, 2 \\ \ell = 4, 5, 6 \end{array} \quad (3.9)$$

Seguindo a orientação de Calcote [ref.8] define-se, a seguir, os coeficientes  $E$ ,  $\nu$  e  $G$

Considera-se um primeiro estado de sollicitações em que:

$$\sigma_1 \neq 0$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

De (3.3), tem-se:

$$C_{11} \cdot e_1 + C_{12} \cdot e_2 + C_{13} \cdot e_3 = \sigma_1$$

$$C_{12} \cdot e_1 + C_{22} \cdot e_2 + C_{32} \cdot e_3 = 0$$

$$C_{13} \cdot e_1 + C_{23} \cdot e_2 + C_{33} \cdot e_3 = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$e_1 = \frac{\sigma_1 (C_{22} \cdot C_{33} - C_{23}^2)}{D}$$

$$e_2 = \frac{\sigma_1 (C_{13} \cdot C_{23} - C_{12} \cdot C_{33})}{D}$$

$$e_3 = \frac{\sigma_1 (C_{12} \cdot C_{23} - C_{22} \cdot C_{13})}{D}$$

Definindo os coeficientes:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{e_1} = \frac{D}{C_{22} \cdot C_{33} - C_{23}^2}$$

$$v_{12} = - \frac{e_2}{e_1} = \frac{C_{12} \cdot C_{33} - C_{13} \cdot C_{23}}{C_{22} \cdot C_{33} - C_{23}^2} \quad (3.10a)$$

$$v_{13} = - \frac{e_3}{e_1} = \frac{C_{22} \cdot C_{13} - C_{12} \cdot C_{23}}{C_{22} \cdot C_{33} - C_{23}^2}$$

Seja um segundo estado de sollicitação:

$$\sigma_2 \neq 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 0$$

De modo análogo ao anterior, pode-se definir:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{e_2} = \frac{D}{C_{11} \cdot C_{33} - C_{13}^2}$$

$$v_{21} = - \frac{e_1}{e_2} = \frac{C_{12} \cdot C_{33} - C_{13} \cdot C_{23}}{C_{11} \cdot C_{33} - C_{13}^2} \quad (3.10b)$$

$$v_{23} = - \frac{e_3}{e_2} = \frac{C_{11} \cdot C_{13} - C_{12} \cdot C_{13}}{C_{11} \cdot C_{33} - C_{13}^2}$$

Seja um terceiro estado de sollicitação:

$$\sigma_3 \neq 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$$

De forma análoga ao primeiro estado, tem-se os coeficientes:

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{e_3} = \frac{D}{C_{11} \cdot C_{22} - C_{12}^2}$$

$$\nu_{31} = - \frac{e_1}{e_3} = \frac{C_{22} \cdot C_{13} - C_{12} C_{23}}{C_{11} \cdot C_{22} - C_{12}^2} \quad (3.10c)$$

$$\nu_{32} = - \frac{e_2}{e_3} = \frac{C_{11} \cdot C_{23} - C_{13} \cdot C_{12}}{C_{11} \cdot C_{22} - C_{12}^2}$$

Das relações (3.10) e (3.4), tem-se:

$$E_i = f(e_k) \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\nu_{ij} = f'(e_k) \quad k = 1, 2, \dots, 6 \quad i \neq j$$

$E_i$  - módulo longitudinal secante ( Young )

$\nu_{ij}$  - coeficiente de Poisson

Essas grandezas são variáveis com o estado de deformação do corpo.

Combinando as relações (3.10) com (3.9), tem-se:

$$S_{ii} = \frac{1}{E_i} \quad i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3$$

$$S_{ij} = -\frac{\nu_{ij}}{E_i} = -\frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i \neq j$$

Pode-se definir os seguintes coeficientes:

$$G_i = \frac{\sigma_i}{e_i} = C_{ii} \quad i = 4, 5, 6 \quad (3.12)$$

Das relações (3.10) e (3.4), tem-se:

$$G_i = f''(e_k) \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

$G_i$  - módulo transversal secante

A grandeza  $G_i$  é variável com o estado de de formação do corpo.

Combinando (3.12) com (3.9), tem-se:

$$S_{\ell\ell} = \frac{1}{G_\ell} \quad \ell = 4, 5, 6 \quad (3.13)$$

Utilizando as relações (3.11) e (3.13), a relação

(3.5) é:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$



De (3.7), tem-se:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

$$\frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}$$

(3.15)

$$\frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}$$

(3.14) e (3.15) confirmam o que já foi visto que são necessários 9 coeficientes para determinar as propriedades dos materiais elásticos e ortótropos e também, observa-se que estes coeficientes são funções do campo de deformações no caso da não linearidade destas propriedades.

### 3.3 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O ESTADO PLANO DE TENSÕES

Para este tipo de problema admite-se por hipótese que:

$$\sigma_3 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (3.16)$$

Logo:

$$e_5 = e_6 = 0$$

Como estas considerações vão violar as condições de compatibilidade, analisa-se como se fosse um estado médio ao longo da espessura da peça aplicado na superfície média desta.

Substituindo:

$$v_1 = v_{12}$$

$$v_2 = v_{21}$$

e de (3.14) e (3.16), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{E_1} & -\frac{v_2}{E_2} & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & 0 \\ \text{Simétrico} & & \frac{1}{G_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

e de (3.15):

$$\frac{v_2}{E_2} = \frac{v_1}{E_1} \quad (3.18)$$

As relações (3.17) e (3.18) podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 e_i &= \frac{1}{E_i} (\sigma_i - \nu_i \cdot \sigma_j) & i &= 1, 2 \\
 & & j &= 2, 1 \\
 e_\ell &= \frac{1}{G_\ell} \sigma_\ell & \ell &= 4
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Explicitando os coeficientes  $E_i$  e  $G_\ell$ :

$$E_i = \frac{\sigma_i - \nu_i \cdot \sigma_j}{e_i} \tag{3.20}$$

$$G_\ell = \frac{\sigma_\ell}{e_\ell}$$

Utilizando estas relações com as leis experimentais a serem apresentadas no capítulo VI determina-se as expressões que relacionam  $E_i$ ,  $\nu_i$  e  $G_\ell$  com o campo de deformações.

Sendo definidos:

$$\nu = \sqrt{\nu_1 \cdot \nu_2}$$

$$E = \sqrt{E_1 \cdot E_2}$$

Utilizando a relação de materiais isotrópicos [ref.3]:

$$G_4 = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

para materiais ortótropos. A relação inversa de (3.17), é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \frac{E_2}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{E_2} & \nu \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & \frac{(1-\nu)}{2} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

(3.21)

É necessário conhecer apenas 3 dos coeficientes  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , de modo que satisfaçam a relação (3.18).

### 3.4 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA O ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÕES

Por hipótese, tem-se:

$$e_3 = e_5 = e_6 = 0$$

Logo:

$$\sigma_5 = \sigma_6 = 0 \quad (3.22)$$

Como o estado plano de deformações contém ainda, 7 coeficientes elásticos para um material ortótropo são efetuadas algumas

simplificações com o objetivo de reduzir o número de coeficientes elásticos:

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_1$$

$$\nu_{21} = \nu_{23} = \nu_2 \quad (3.23)$$

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \nu_3$$

De (3.14) e levando em conta as hipóteses (3.22) e (3.23), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_2}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 \\ & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 \\ \text{Simétrico} & & & \frac{1}{G_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix}$$

(3.24)

Da terceira equação, tem-se:

$$\frac{\sigma_3}{E_3} = \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_1 + \frac{\nu_2}{E_2} \sigma_2 = \Delta \quad (3.25)$$

Da condição de simetria (3.15).

$$\frac{v_1}{E_1} = \frac{v_2}{E_2} = \frac{v_3}{E_3} \quad (3.26)$$

De (3.24), (3.25) e (3.26), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 - v_3 v_2}{E_1} & \frac{(v_2 + v_3 v_1)}{E_2} & 0 \\ & \frac{1 - v_3 v_1}{E_2} & 0 \\ \text{Simétrico} & & \frac{1}{G_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

De (3.25) e (3.26):

$$\Delta = \frac{v_1}{E_1} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{v_2}{E_2} (\sigma_1 + \sigma_2) = \frac{v_3}{E_3} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (3.28)$$

De (3.27) e (3.28):

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{\sigma_i - v_i \cdot \sigma_j}{e_i + v_3 \cdot \Delta} & i &= 1, 2 \\ & & j &= 2, 1 \\ G_\ell &= \frac{\sigma_\ell}{e_\ell} & \ell &= 4 \end{aligned} \quad (3.29)$$

De modo análogo ao estado plano de tensões obtem-se as expressões que ligam  $E_i$  e  $v_i$  com o campo de deformações.

Como já visto anteriormente:

$$E = \sqrt{E_1 \cdot E_2}$$

$$v = \sqrt{v_1 \cdot v_2}$$

$$G_4 = \frac{E}{2(1+v)}$$

e, sendo:

$$D = \frac{E_2}{1 - v_1 v_2 - v_2 v_3 - v_1 v_3 - 2v_1 v_2 v_3}$$

A relação inversa de (3.27) é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D \cdot E_1 \cdot (1 - v_3 v_2)}{E_2} & D v_1 (1 + v_3) & 0 \\ & D (1 - v_3 v_1) & 0 \\ \text{Simétrico} & & \frac{E}{2(1+v)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

(3.30)

Neste tipo de problema é necessário conhecer 4 dos coeficientes  $E_i$ ,  $v_j$  ( $i=1,2$  e  $j=1,2,3$ ) desde que satisfaçam a relação (3.26).

#### IV - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO AO COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DO MATERIAL

##### 4.1 - FUNDAMENTOS TEÓRICOS DO MÉTODO:

Na utilização de métodos numéricos para a resolução de problemas da Teoria da Elasticidade é fundamental conhecer a convergência destes métodos para a solução exata. Isto será mostrado neste capítulo com o auxílio dos resultados obtidos nas referências 9 e 10.

No capítulo II foi visto as hipóteses necessárias para que o funcional Energia Potencial Total (T), aplicado a problemas elásticos, alcançada a estacionaridade (mínimo), fornecesse a solução. Tal solução é obtida através de um método numérico, particularmente, o método dos Elementos Finitos.

De (2.11) , (2.15) e (2.17) , tem-se:

$$T = U + P = \int_V W \, dV - \int_V X_i u_i \, dV - \int \left\{ \sigma_{n_i} u_i \, d \right\}_1$$

De (2.14) e (2.18) e colocando as tensões e deformações sob a forma vetorial:



$$\delta T = \delta U + \delta P = \int_V \sigma_i \delta e_i dV - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_{\sum_1} \sigma_{n_i} u_i d\Gamma = 0 \quad (4.1)$$

$$\delta^2 T = \int_V \delta \sigma_i \delta e_i dV > 0 \quad (4.2)$$

Esta formulação utiliza o funcional de um campo, porque as variáveis generalizadas a serem minimizadas são os deslocamentos  $(u_i)$ . O método, portanto, consiste em determinar o campo de deslocamentos  $(u_i)$  que satisfaça a relação (4.1).

Devido a não linearidade das equações constitutivas, o sistema de equações resultantes é não linear sendo necessário estabelecer um método iterativo para a solução do sistema.

O algoritmo utilizado é uma variante do Newton-Raphson generalizado apresentado por Iakvlev [ref.9].

Tem-se então, na n+1 etapa:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \beta_i^n \left[ F' (u_j^n) \right]^{-1} \cdot F(u_j^n) \quad (4.3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, \ell$$

$\ell$  - número de variáveis generalizadas

$u_i^n$  - vetor deslocamento após a enésima etapa do método iterativo

$\beta_i^n$  - fator de aceleração para a convergência

Sendo  $\langle , \rangle$  o produto interno de um espaço.

$$\delta T(u_j, \eta) = \langle F(u_j), \eta \rangle \quad (4.4)$$

$$\delta^2 T(u_j, \eta, \eta) = \langle F'(u_j) \eta, \eta \rangle \quad (4.5)$$

$F$  - núcleo da primeira variação do funcional  $T$

$F'$  - núcleo da segunda variação do funcional  $T$

$\eta$  - função variação qualquer

Analisando a convergência do método, onde  $u_i^*$ , é o vetor de deslocamentos solução do problema, então de (4.4), tem-se:

$$\delta T(u_i^*) = 0 \quad \longrightarrow \quad F(u_i^*) = 0 \quad (\text{Equação de Euler})$$

Se:

$$\begin{array}{ccc} u_i^n & u_i^* & \longrightarrow \\ & & F(u_i^n) \rightarrow 0 \quad (\text{resíduo}) \\ & & u_i^{n+1} - u_i^n \rightarrow 0 \quad (\text{incremento}) \end{array}$$

A condição de convergência deste algoritmo é:

$\exists M > 0$  e  $\forall m > 0$ , onde  $m, M \in H$  (espaço de Hilbert).

Então:

$$m \langle \eta, \eta \rangle \leq \langle F'(u_i) \eta, \eta \rangle \leq M \langle \eta, \eta \rangle$$

De (4.5), tem-se:

$$m \langle \eta, \eta \rangle \leq \delta^2 T(u_i, \eta, \eta) \leq M \langle \eta, \eta \rangle \quad (4.6)$$

Esta condição é fundamental para demonstrar a convergência do método dos Elementos Finitos em problemas não lineares [ref.10], como será visto a seguir:

Seja  $q_i$  o campo de deslocamentos adotado no método dos elementos finitos.

Se:  $u_i^*, q_i \in H$ ; da [ref.10], tem-se:

$$\|T(q_i) - T(u_i^*)\| \leq \delta^2 T(u_i, E, E) \quad (4.7)$$

Onde:

$$E = \Pi_h u_i^* - q_i$$

$E$  - erro de interpolação

$\Pi_h$  - projeção no espaço das funções que aproximam a solução segundo uma certa malha de elementos finitos.

$h$  - parâmetro definido como a maior distância entre dois

nós, pertencentes ao mesmo elemento, na malha utilizada. (Fig.4.1).

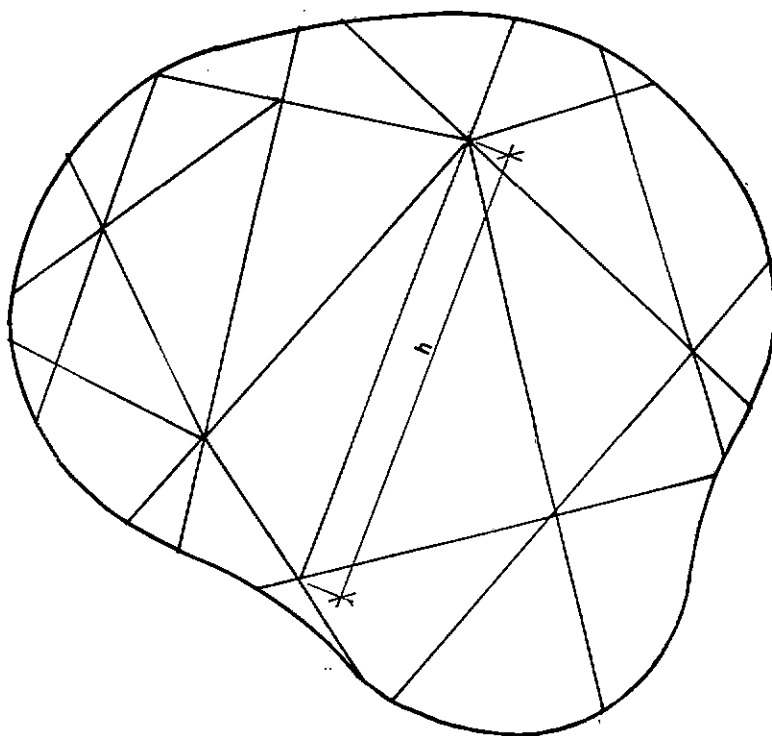


Figura 4.1 - Parâmetro de malha (h)

De (4.6) e (4.7), tem-se:

$$\left| T(q_i) - T(u_i^*) \right| \leq M \cdot \langle E, E \rangle \quad (4.8)$$

Da definição de norma:

$$\| E \|^2 = \langle E, E \rangle$$

Tem-se: de (4.8):

$$\left| T(q_i) - T(u_i^*) \right| \leq M \| E \|^2 \quad (4.9)$$

Sendo  $N > 0 \in H$ , tem-se o Teorema da Interpolação:

$$|| E || < N \cdot h^k \cdot |u|_k \quad (4.10)$$

$k$  - ordem do polinômio de interpolação

$| \cdot |_k$  - semi-norma de ordem  $k$  [ref.10].

De (4.9) e (4.10) mostra-se que quando o parâmetro de malha ( $h$ ) tende a zero o funcional de energia potencial da solução por elementos finitos ( $T(q_i)$ ) converge para o funcional real ( $T(u_i^*)$ ), sendo válido para os deslocamentos  $q_i$  os resultados da estacionaridade apresentados para  $u_i^*$ .

#### 4.2 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA ESTADO PLANO DE TENSÕES OU DE DEFORMAÇÕES

Para a aplicação deste método numérico em problemas de Elasticidade Plana, fundamentado na [ref.6], adota-se o seguinte procedimento:

##### Primeira etapa:

Arbitra-se certas funções de interpolação cujas variáveis generalizadas são os deslocamentos nodais e com a seguinte forma:

$$u_i = N_{ij} q_j \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, \ell \end{matrix} \quad (4.11)$$

- $n$  - número de graus de liberdade em cada nó da malha dos elementos.  
 $\ell$  - número de graus de liberdade de um elemento  
 $N_{ij}$  - função de interpolação

Neste trabalho o elemento utilizado foi o de forma triangular com o campo interno de deslocamentos linear, denominado TRIM 3. (Fig.4.2).

Portanto:

$$n = 2 \quad e \quad \ell = 6$$

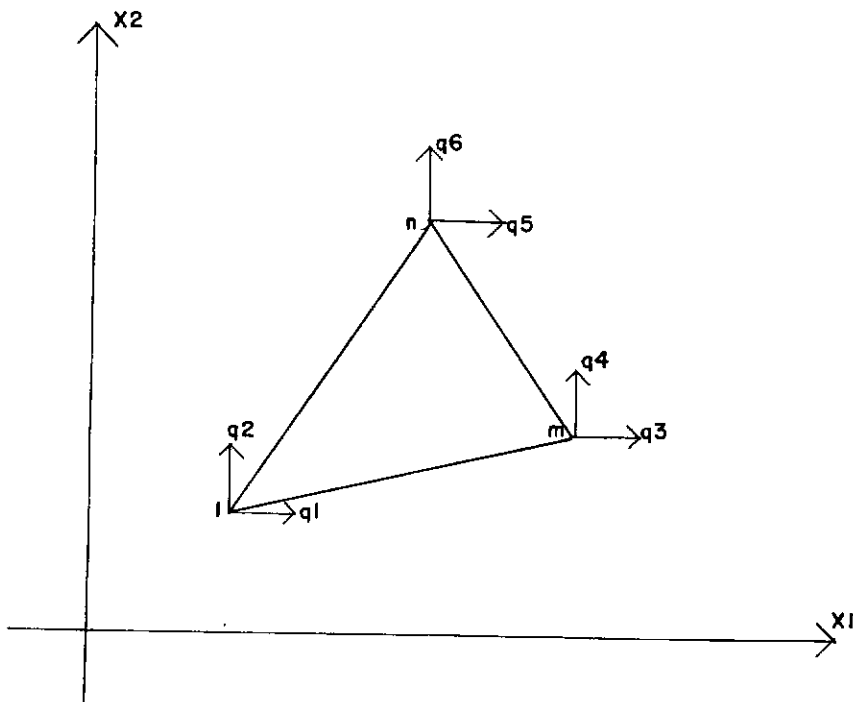


Figura 4.2: Elemento TRIM 3

Coordenadas dos nós:

$$\text{Nó } \ell: \begin{cases} x_{1\ell} \\ x_{2\ell} \end{cases}$$

$$N_{\bar{o} m}: \begin{cases} x_{1m} \\ x_{2m} \end{cases}$$

$$N_{\bar{o} n}: \begin{cases} x_{1n} \\ x_{2n} \end{cases}$$

Funções de interpolação:

$$N_{ij} = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x_1 + c_j x_2)$$

Onde:

$$N_{ij} = 0 \quad \begin{cases} i = 1 & e & j = 2, 4, 6 \\ i = 2 & e & j = 1, 3, 5 \end{cases}$$

e

$$j = 1 \text{ e } 2$$

$$a_j = x_{1m} \cdot x_{2n} - x_{1n} \cdot x_{2m}$$

$$b_j = x_{2m} - x_{2n}$$

$$c_j = x_{1m} - x_{1n}$$

$j = 3 \text{ e } 4$  : trocar em  $a_j$ ,  $b_j$  e  $c_j$   $\underline{m}$  por  $\underline{n}$  e  $\underline{n}$  por  $\underline{\ell}$ .

$j = 5 \text{ e } 6$  : trocar em  $a_j$ ,  $b_j$  e  $c_j$   $\underline{m}$  por  $\underline{\ell}$  e  $\underline{n}$  por  $\underline{m}$ .

e a área do elementos ( $\Delta$ ):

$$\Delta = \frac{1}{2} \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1\ell} & x_{2\ell} \\ 1 & x_{1m} & x_{2m} \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} \end{vmatrix}$$

Segunda etapa:

Aplica-se a equação cinemática (2.6) para obter-se as deformações em funções dos deslocamentos nodais:

$$e_r = A_{ri} \cdot u_i \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ r = 1, 2 \text{ e } 3 \end{array} \quad (4.12)$$

Onde o operador A é:

$$A = [A_{ri}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

De (4.11) e (4.12), tem-se:

$$e_r = B_{rj} \cdot q_j \quad j = 1, 2, \dots, 6 \quad (4.13)$$

$$B_{rj} = A_{ri} \cdot N_{ij} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_3 & 0 & b_5 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & c_4 & 0 & c_6 \\ c_1 & b_2 & c_3 & b_4 & c_5 & b_6 \end{bmatrix}$$



Terceira etapa:

Aplica-se as equações constitutivas dos materiais; nas quais supõe-se os materiais elásticos, estáveis e ortótropos e com os coeficientes funções do campo de deformações. Logo de (3.3), (3.4) e (4.13):

$$\sigma_i = C_{ir} \cdot B_{rj} \cdot q_j \quad (4.14)$$

Onde:

$$C_{ir} = f(q_j) \quad (4.15)$$

Esta função é determinada a partir das relações (3.21) para o estado plano de tensões ou das relações (3.30) para o estado plano de deformações e sendo conhecidas as relações que determinam os coeficientes destas relações em função do campo de deformações.

Quarta etapa:

Admitindo de (2.6) que  $B_{rj}$  independe de  $q_j$ . (Linearidade Geométrica) e aplicando (4.1) ao nível de elemento, tem-se:

$$\delta T_e = \int_{V_e} \delta e_i \cdot \sigma_i \, dV_e - \delta q_j \cdot f_j^e = 0 \quad (4.16)$$

$$e = 1, 2, \dots, N_e$$

$V_e$  - domínio do elemento

$f_j^e$  - resultantes de todas as solicitações aplicadas no elemento  $\underline{e}$ , nos nós deste.

$N_e$  - número de elementos da malha.

De (4.13), (4.14) e (4.16), tem-se:

$$\delta q_j \left[ \int_{V_e} B_{ji} C_{ir} B_{r\ell} dV_e q_\ell - f_j^e \right] = 0$$

Como  $\delta q_j$  são componentes de um vetor das variações quaisquer dos deslocamentos nodais, tem-se:

$$k_{j\ell}^e q_\ell - f_j^e = 0 \quad (4.17)$$

$$k_{j\ell}^e = \int_{V_e} B_{ji} C_{ir} B_{r\ell} dV_e$$

$k_{j\ell}^e$  - coeficientes da matriz de regidez de elemento  $\underline{e}$ .

$f_j^e$  - coeficientes do vetor das cargas no elemento  $\underline{e}$ .

#### Quinta etapa:

Aplicando a equação (4.17) a todos os elemenos

tos a que foi subdividido o domínio e fazendo uma montagem adequada dos coeficientes da matriz de rigidez para os deslocamentos de mesmo nós e direções, escreve-se:

$$K_{ji} \cdot q_i - Q_j = 0 \quad (4.18)$$

$K_{ji}$  - coeficientes da matriz de rigidez global do problema.

$Q_j$  - coeficientes do vetor de todas as cargas do problema.

De (4.15) e (4.17), tem-se:

$$K_{ij} = f(q_\ell) \quad (4.19)$$

Aplicando (4.2) ao nível do elemento e supondo constante as propriedades elásticas para cada etapa do método iterativo:

$$\delta^2 T_e = \delta q_j \cdot k_{j\ell}^e \cdot \delta q_\ell > 0$$

Portanto, a matriz dos coeficientes  $k_{je}$  é positiva definida.

Como a matriz global é uma montagem a partir das matrizes de rigidez dos elementos e já foi visto que quando o parâmetro  $h$  tende a zero o problema converge, pode-se generalizar que a matriz de coeficiente  $K_{ij}$  também é positiva definida.

Sexta etapa:

Evidentemente sempre supõe-se que os coeficientes elásticos serão finitos, e portanto, limitada a matriz de rigidez global, isto é:

$$K_{ij}(q_\ell) \leq M$$

Esta propriedade conjugada com a de positiva definida são as condições de aplicabilidade do algoritmo (4.3), e sendo de (4.4) e (4.5):

$$F(q_\ell) = K_{ij} \cdot q_j - Q_i$$

$$F'(q_\ell) = K_{ij}$$

Então:

$$q_\ell^{n+1} = q_\ell^n - \beta_\ell^n \cdot [K_{ij}^n(q_\ell^n)]^{-1} \cdot (K_{ij}^n q_j^n - Q_i) \quad (4.20)$$

$n$  - índice da etapa da iteração

$\ell = 1, 2, \dots, M$

$M$  - número de graus de liberdade do problema

Sendo que os deslocamentos prescritos "a priori" nas condições de fronteira ( $\sum_2$ ) são invariáveis.

Pode-se utilizar o fator de aceleração de Aitken modificado [ref.16]:

$$\beta_{\ell}^n = \beta_{\ell}^{n-1} + (\beta_{\ell}^{n-1} - 1) \cdot \left( \frac{D_{\ell}^n}{D_{\ell}^{n-1} - D_{\ell}^n} \right) \quad (4.21)$$

onde:

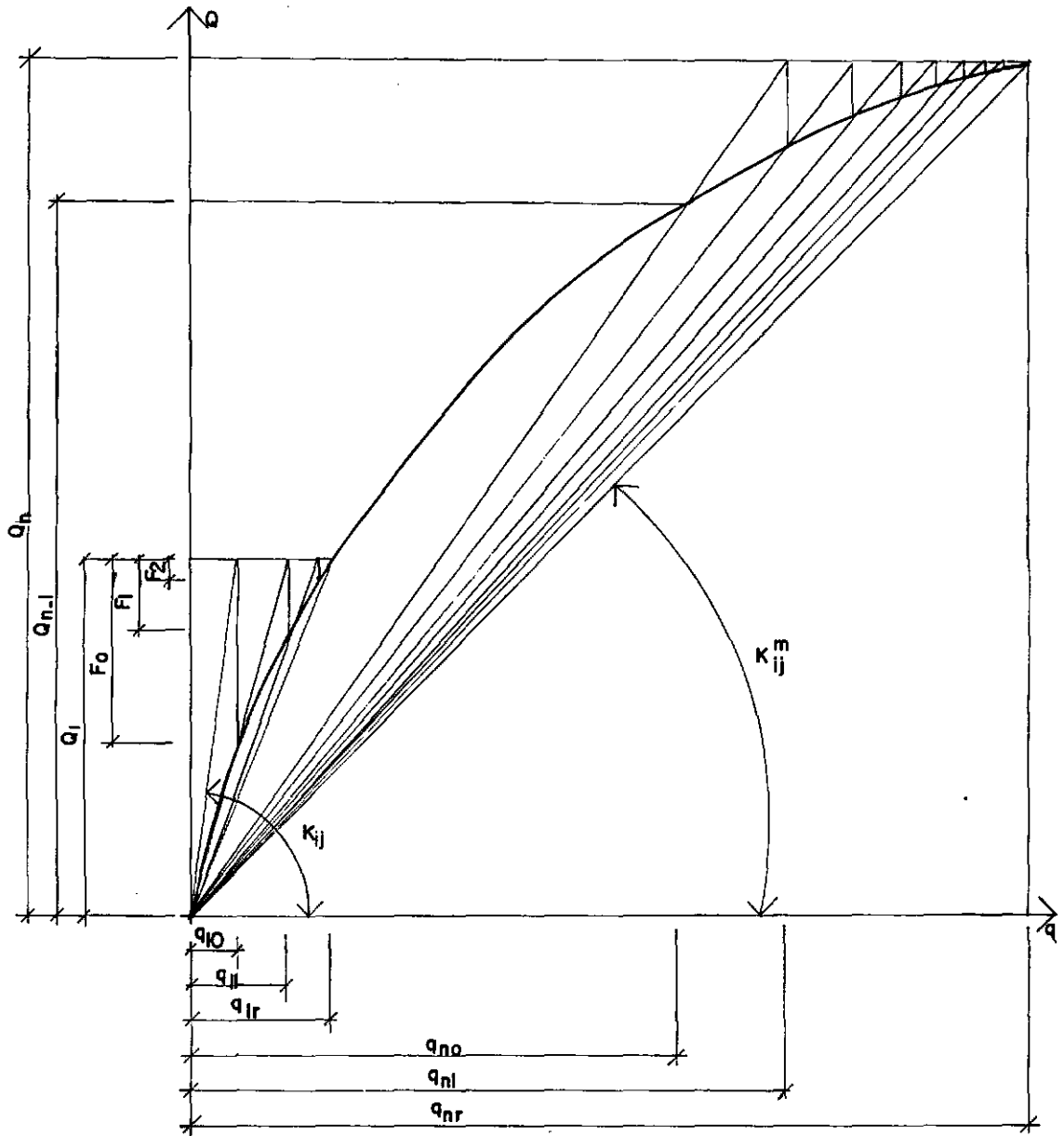
$$D_{\ell}^n = q_{\ell}^{n-1} - q_{\ell}^n$$

Sétima etapa:

Com o cálculo do vetor  $q_{\ell}^{n+1}$  compara-se, em termos absolutos, o erro relativo:

$$\left( \frac{q_{\ell}^{n+1} - q_{\ell}^n}{q_{\ell}^{n+1}} \right)$$

a um valor pré-fixado. Sendo menor calcula-se as Tensões e Deformações correspondentes a estes deslocamentos e incrementa-se a carga para determinar um novo campo de deslocamentos. Sendo maior, retorna-se a terceira etapa do método, até que haja a convergência. (Figura 4.3).



$n$  - número de incrementos de carga

$r$  - número de iterações por incremento

$m = r(1) + r(2) + \dots + r(n)$  - número total de iterações

Figura 4.3 - Método incremental - iterativo para problemas não lineares.

## V - PROGRAMA AUTOMÁTICO

### 5.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PROGRAMA

O programa desenvolvido foi em Linguagem Fortran (versão IV) para computadores de grande porte como: IBM/360 e /370 ou o Burroughs 6700.

Utiliza-se arquivos auxiliares para guardar a matriz de rigidez da estrutura particionada ou não em blocos, cujo limite de variáveis de cada bloco dependerá da memória útil do computador.

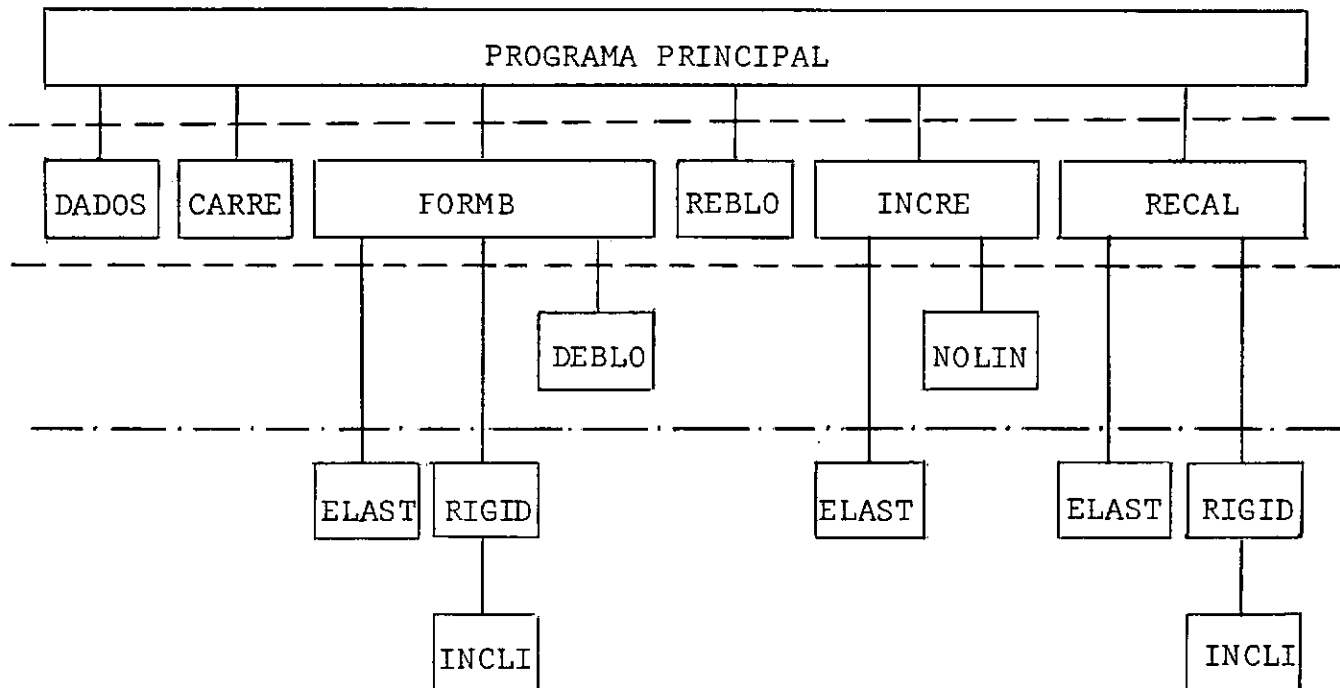


Figura 5.1 - Esquema do Programa

No esquema mostrado na figura 5.1, a linha tracejada (---), significa a divisão do programa em estruturas de "overlay", sendo que na linha traço-ponto (-.-.-) ocorre um "overlay" particular chamado "region" onde pode-se, em qualquer lugar, chamar as subrotinas nesta região.

## 5.2 - SUBROTINAS DOS DADOS

DADOS: - Nesta subrotina le-se a topologia da estrutura, as propriedades do material analisado. As coordenadas e as incidências dos nós podem ser geradas automaticamente.

CARRE: - Nesta subrotina le-se os carregamentos da estrutura, o erro admissível no processo iterativo e nº de incrementos de carga com os respectivos pesos de cada incremento.

## 5.3 - SUBROTINAS RETIRADAS DA REFERÊNCIA 11

FORMB: - Nesta subrotina a matriz de rigidez global é montada em vetor e em blocos e guardada num arquivo auxiliar.

ELAST: - Nesta subrotina são calculados os coeficientes da matriz constitutiva do material, levando em conta a ortotropia e se o problema é estado plano de tensões ou de deformações.

RIGID: - Nesta subrotina calcula-se a matriz de rigidez do elemento (TRIM 3).



INCLI: - Subrotina para a rotação dos eixos locais quando o apoio no elemento analisado é inclinado.

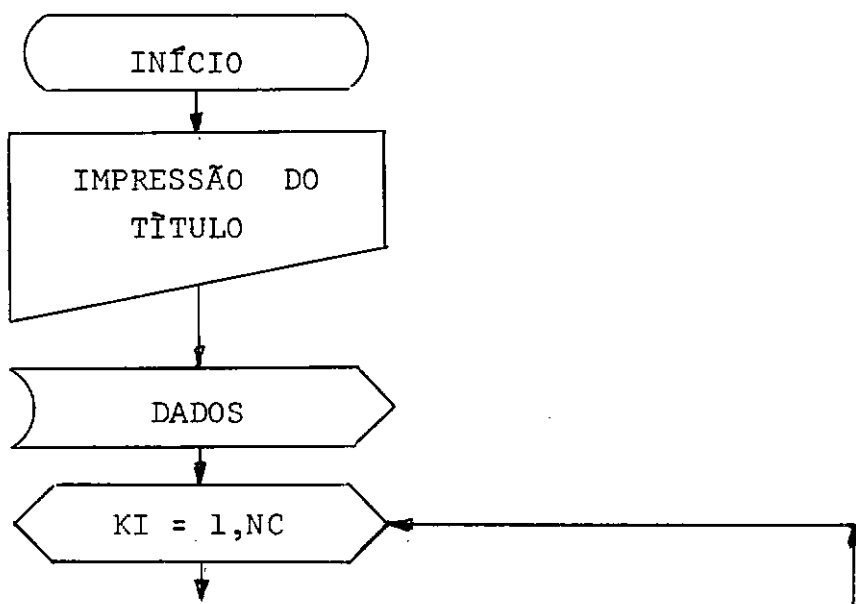
DEBLO: - Subrotina que triangulariza a matriz de rigidez global já particionada ou não, verificando a viabilidade de aplicação do método de Cholesky e quando necessário calculando os resíduos para o bloco da partição seguinte.

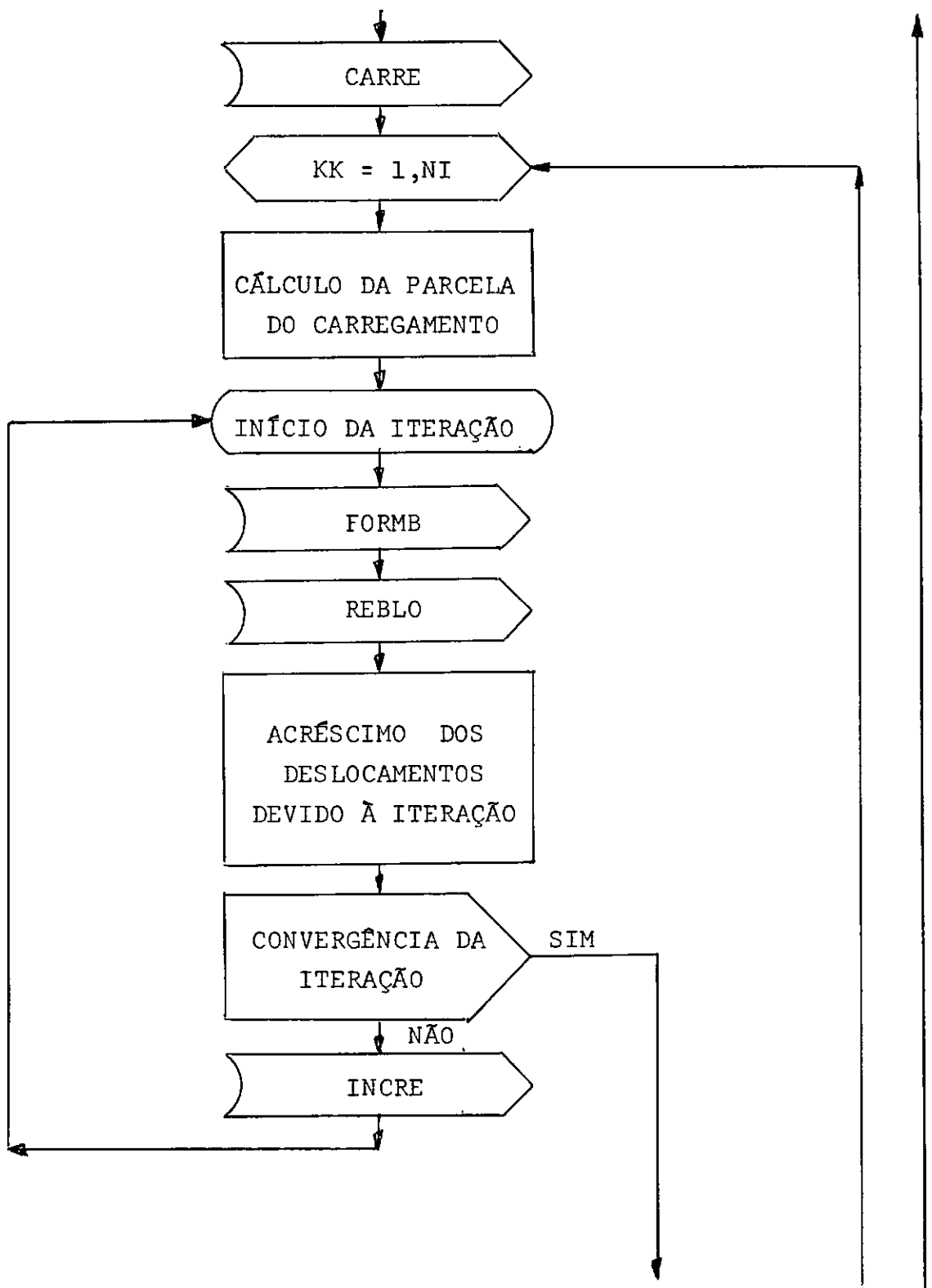
REBLO: - Subrotina que resolve o sistema de equações após a matriz de rigidez ser tringularizada.

RECAL: - Subrotina que calcula as reações de apoio da estrutura.

#### 5.4 - PROGRAMA PRINCIPAL

No programa principal é que está programado o algoritmo para a resolução dos sistemas de equações não lineares.





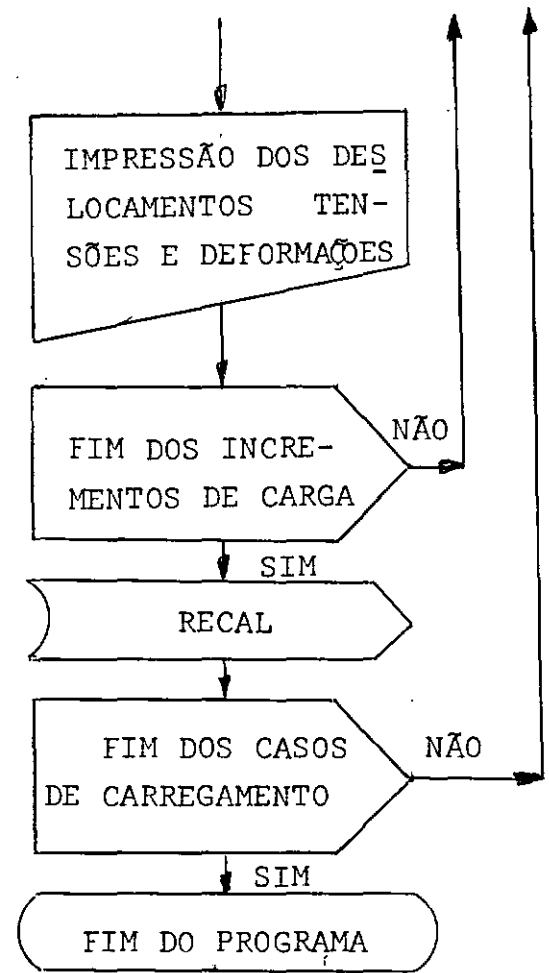


Figura 5.2 - Diagrama de bloco do programa principal

### 5.5 - SUBROTINA INCRE

Nesta subrotina calcula-se o novo vetor de cargas para a próxima iteração devido o campo de deslocamentos não ser compatível com o campo de tensões segundo as equações constitutivas adotadas. A partir desta subrotina é chamada a NOLIN que explicar-se-á adiante:

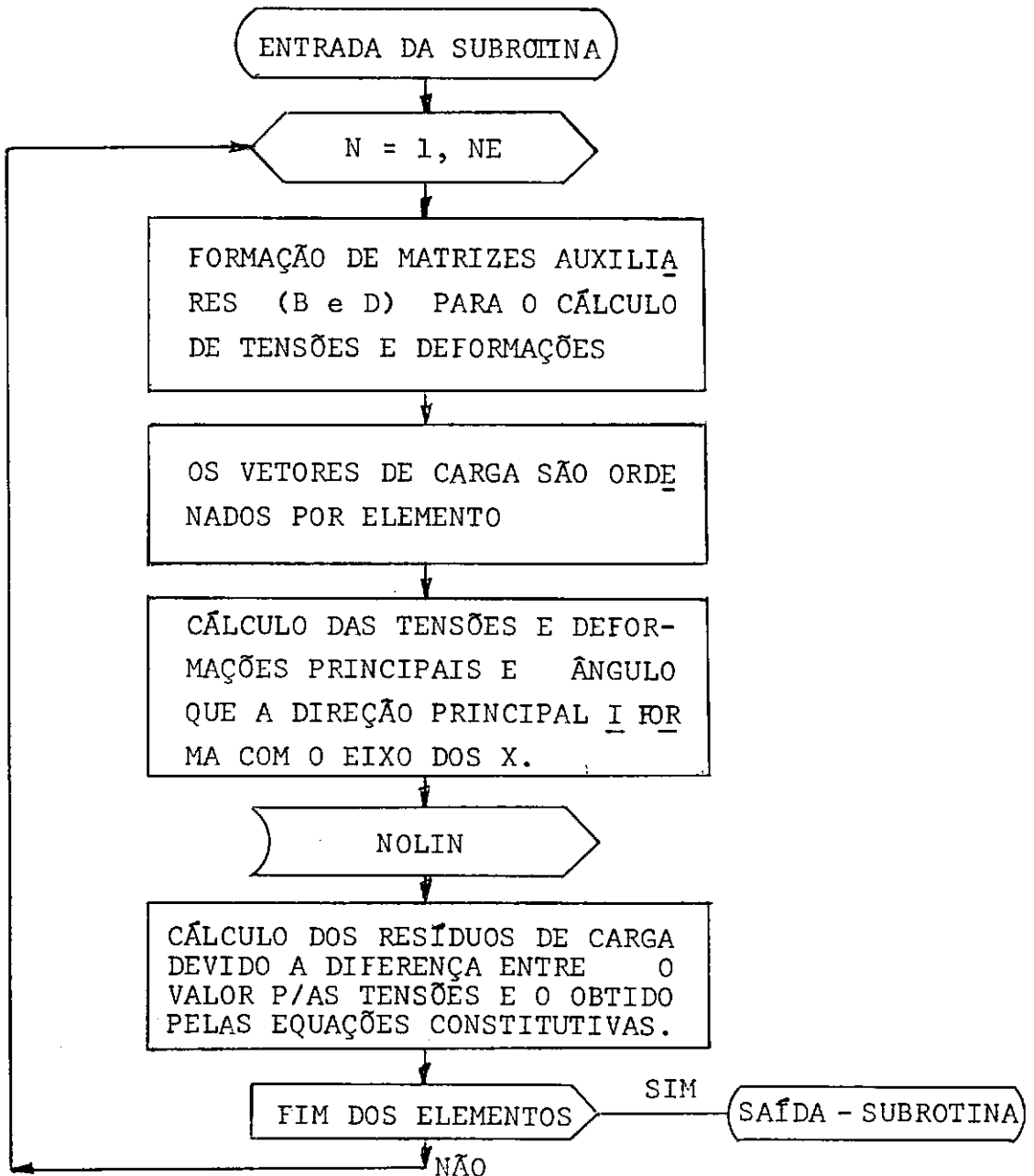


Figura 5.3 - Diagrama de bloco da subrotina INCRE

5.6 - SUBROTINA NOLIN

Nesta subrotina calcula-se o estado de tensões e as propriedades elásticas corretas, segundo as equações constitutivas do material dado em função das deformações principais (entrada da subrotina).

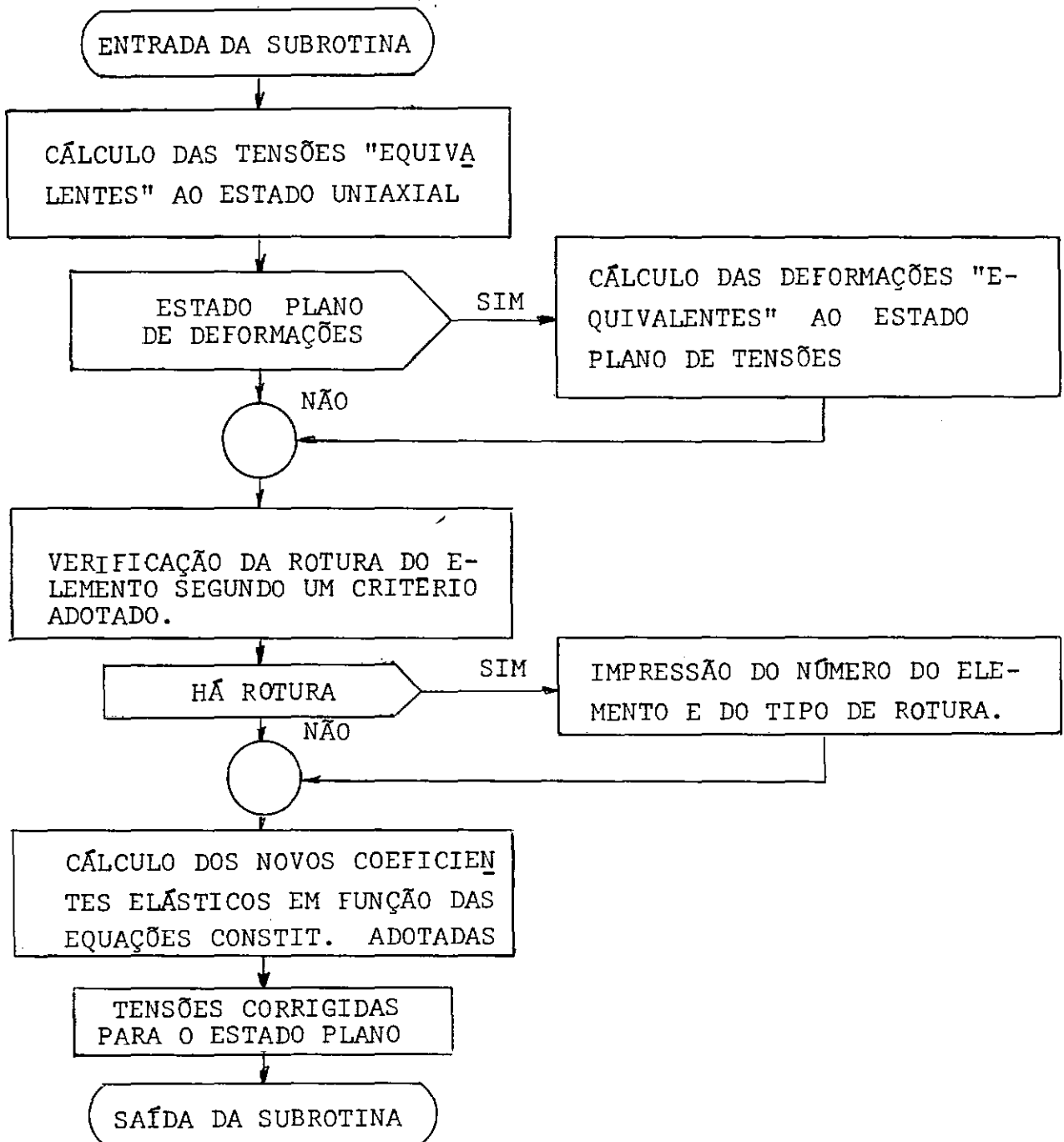


Figura 5.4 - Diagrama de bloco da subrotina NOLIN

## VI - APLICAÇÕES A ESTRUTURAS DE CONCRETO EM ESTADO PLANO DE TENSÕES OU DE DEFORMAÇÕES

### 6.1 - EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS DO CONCRETO

Das relações (3.20) de estado plano de tensões, e sendo:

$$T_i^* = \sigma_i - \nu_i \sigma_j \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \\ j = 2, 1 \end{array} \quad (6.1)$$

Tem-se:

$$E_i = \frac{T_i^*}{e_i} \quad (6.2)$$

$T_i^*$  - tensão "equivalente" ao estado uniaxial na direção  $i$ .

Utilizando a curva do C.E.B. [ref.17], para o concreto submetido a um estado de compressão simples (uniaxial).

Tem-se:

$$T_i^* = a e_i^2 + b e_i + c \quad (6.3)$$

De (2.13).

$$c = 0 \quad (6.4)$$

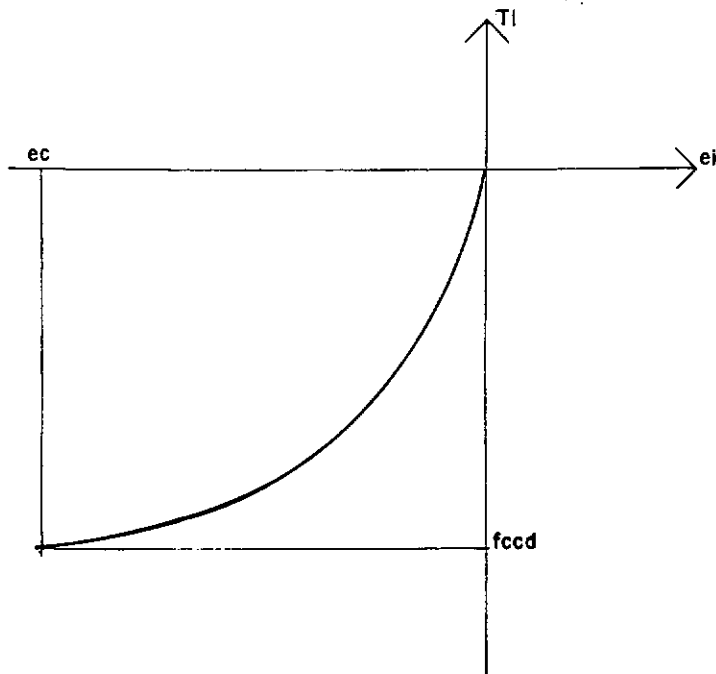


Figura 6.1 - Curva do C.E.B. para a compressão simples.

Da curva da figura 6.1:

$$T_i^* = - f_{ccd}$$

$$e_i = e_c$$

$$\frac{d T_i^*}{d e_i} = 0$$

$e_c$  - deformação do concreto no início da plastificação à compressão.

$f_{ccd}$  - tensão de cálculo do concreto à compressão.

Estas condições em (6.3):

$$a = \frac{f_{ccd}}{e_c^2} \quad (6.5)$$

$$b = \frac{2 f_{ccd}}{e_c}$$

De (6.2) , (6.3) , (6.4) e (6.5), tem-se:

$$T_i^* = \frac{f_{ccd}}{e_c^2} e_i^2 + \frac{2 f_{ccd}}{e_c} e_i \quad (6.6)$$

$$E_i = \frac{f_{ccd}}{e_c^2} e_i + \frac{2 f_{ccd}}{e_c} \quad (6.7)$$

A relação inversa de (5.1) é:

$$\sigma_i = \frac{T_i^* + v_i T_j}{1 - v_i v_j} \quad \begin{matrix} i = 1, 2 \\ j = 2, 1 \end{matrix} \quad (6.8)$$

Para solicitações trativas, isto é,  $T_i > 0$ , o material obedecerá a Lei de Hooke:

$$E_i = \text{const.} = \frac{2 f_{ccd}}{e_c} \quad (6.9)$$

$$T_i^* = \frac{2 f_{ccd}}{e_c} e_i \quad (6.10)$$

Sendo ainda válida a relação (6.8).



Adota-se por simplificação:

$$\nu_2 = \text{const.} = 0,2 \quad (6.11)$$

De (3.18):

$$\nu_1 = \frac{E_1}{E_2} \nu_2 \quad (6.12)$$

Sendo de (3.29):

$$d_i = e_i + \nu_3 \Delta \quad (6.13)$$

$d_i$  - deformação equivalente ao estado plano de tensões.

No estado plano de deformações substitui-se  $e_i$  por  $d_i$  nas relações (6.6) , (6.7) , (6.9) e (6.10), e é adotado:

$$\nu_3 = 0,2 \quad (6.14)$$

Logo as equações constitutivas (3.21) e (3.30) ficam determinadas em cada estado de deformações pelas relações (6.6) a (6.14).

## 6.2 - ESTADOS LIMITES DO CONCRETO

Segundo a [ref.18], utiliza-se a envoltória de Coulomb - Mohr para a rotura por compressão e a maior

tensão principal de tração para a rotura por tração. (Fig. 6.2)

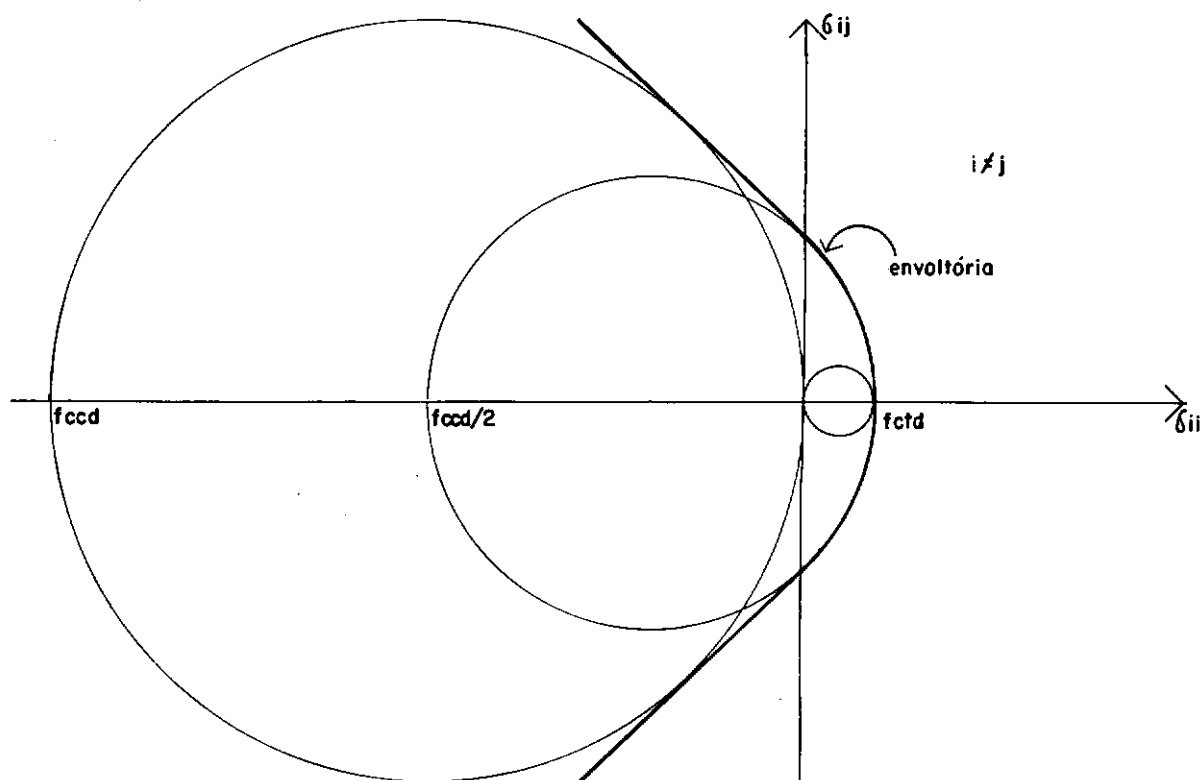


Figura 6.2 - Envoltória do Concreto

Para o estado plano de tensões ( $\sigma_z = 0$ ), tem-se:

$$f_{ctd} \leq \sigma_1 \leq 0 \quad (\text{Figura 6.3})$$

Para o estado plano de deformações, existe  $\sigma_z$ , e portanto,  $\sigma_1$  pode ser de compressão. (Figura 6.4).

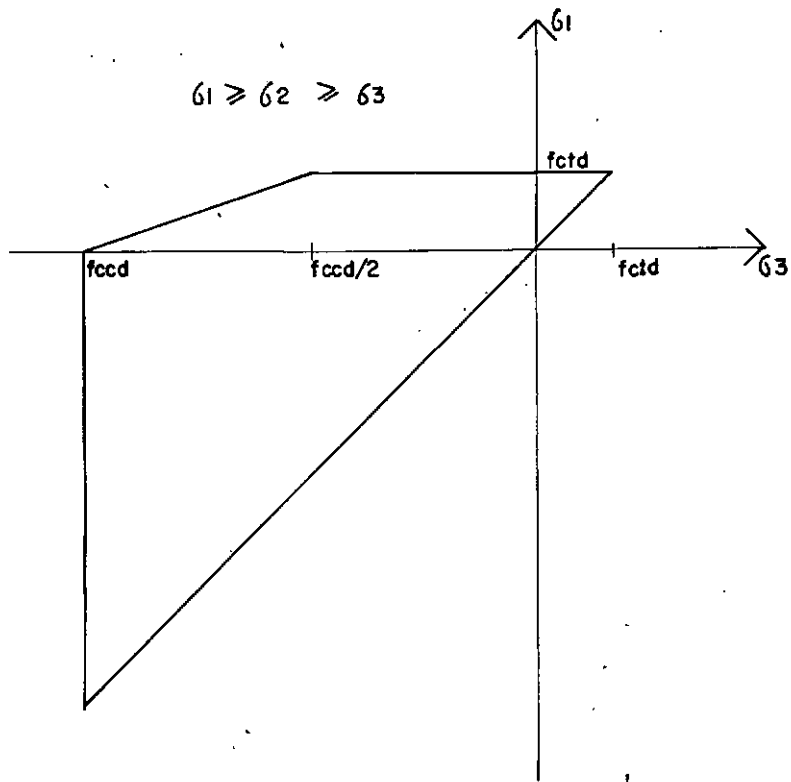


Figura 6.3 - Envoltória para estado plano de tensões

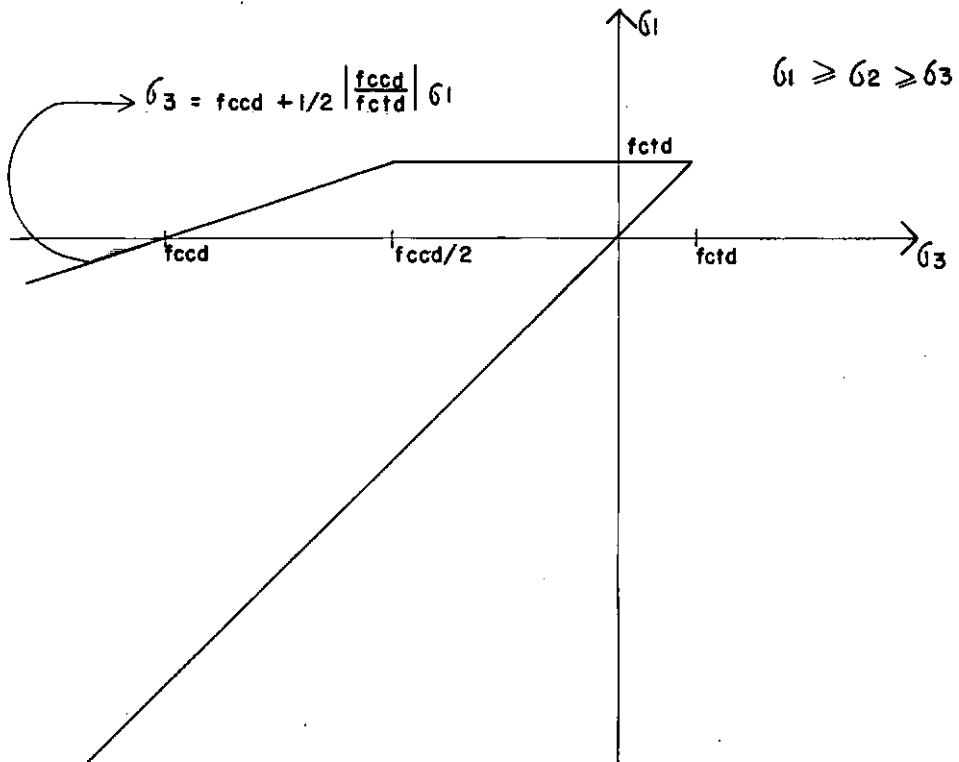


Figura 6.4 - Envoltória para estado plano de deformações.

### 6.3 - APLICAÇÃO I:

Comparação das equações estabelecidas no item I, deste capítulo, com os resultados apresentados por Kupfer [ref.12].

A malha utilizada para discretizar o corpo 'de prova' é:

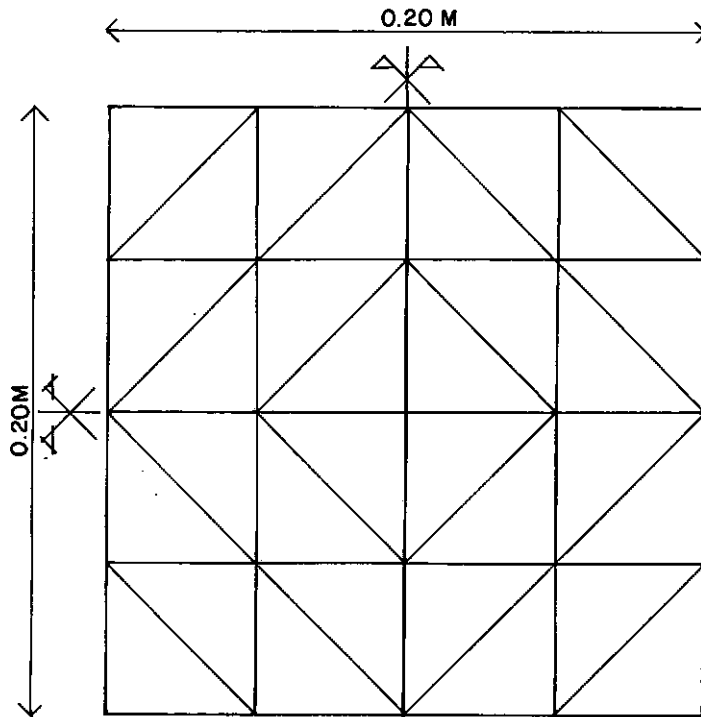


Figura 6.5 - Malha de elementos finitos da aplicação I

Neste problema a análise foi a de um estado plano de tensões, com 4 tipos de carregamentos que são mostrados a seguir, e como dados tem-se:

$$f_{ccd} = 1500 \text{ t/m}^2$$

$$f_{ctd} = 150 \text{ t/m}^2$$

$$e_c = 0,002$$

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\pm 1}{0}$$

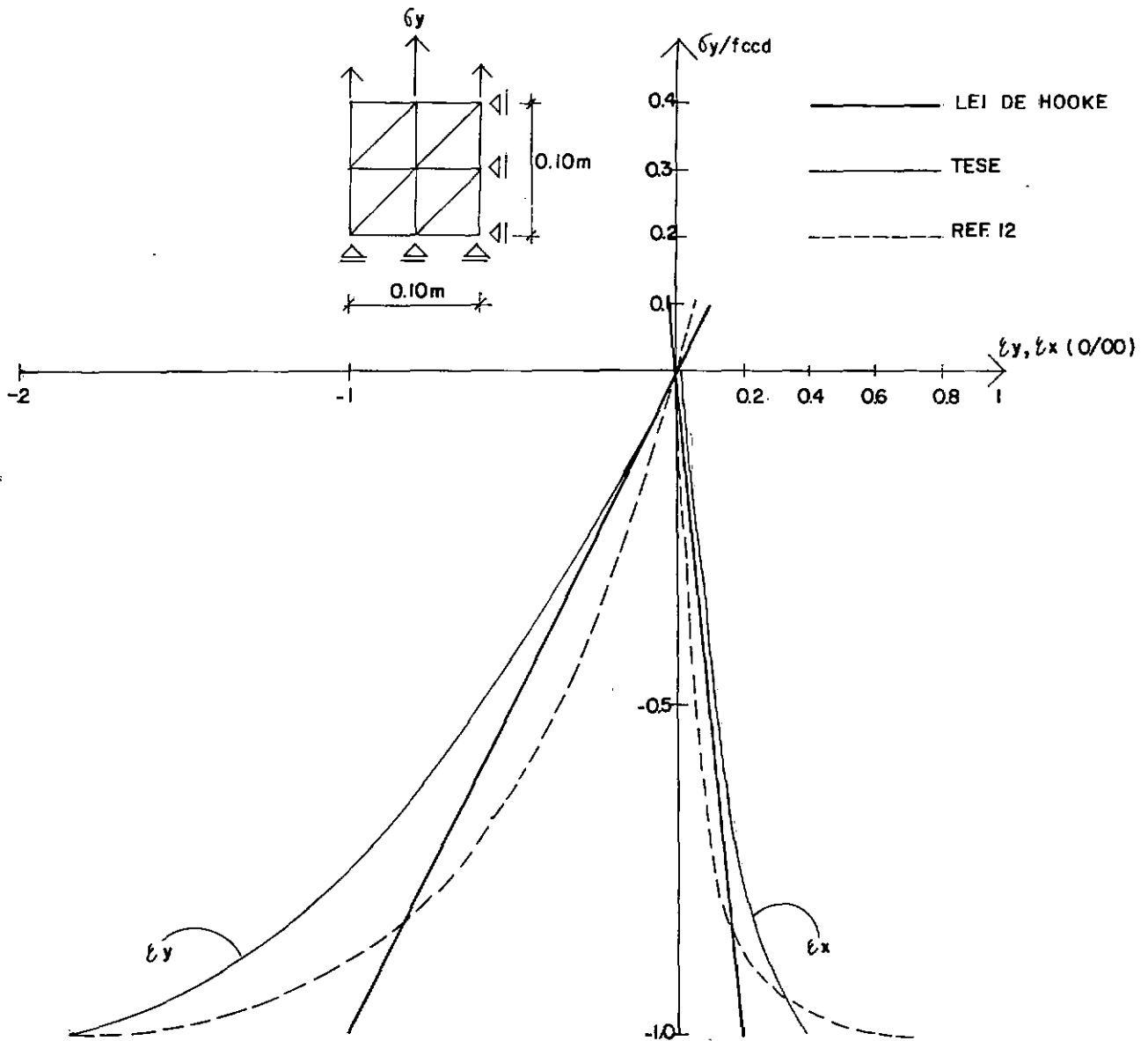


Figura 6.6 - Carregamento 1

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\pm 1}{\pm 0.5}$$

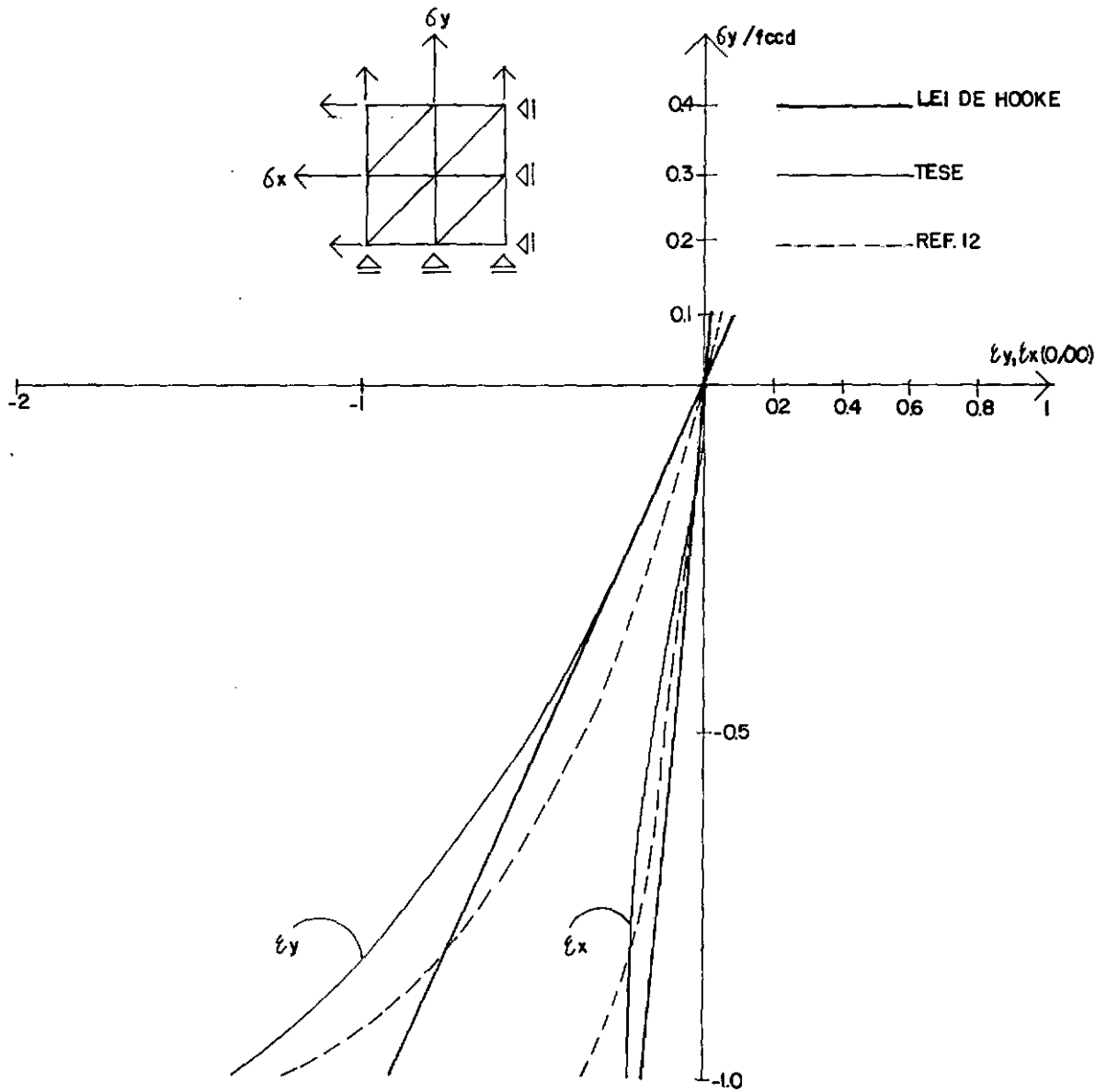


Figura 6.7 - Carregamento 2

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \pm 1$$

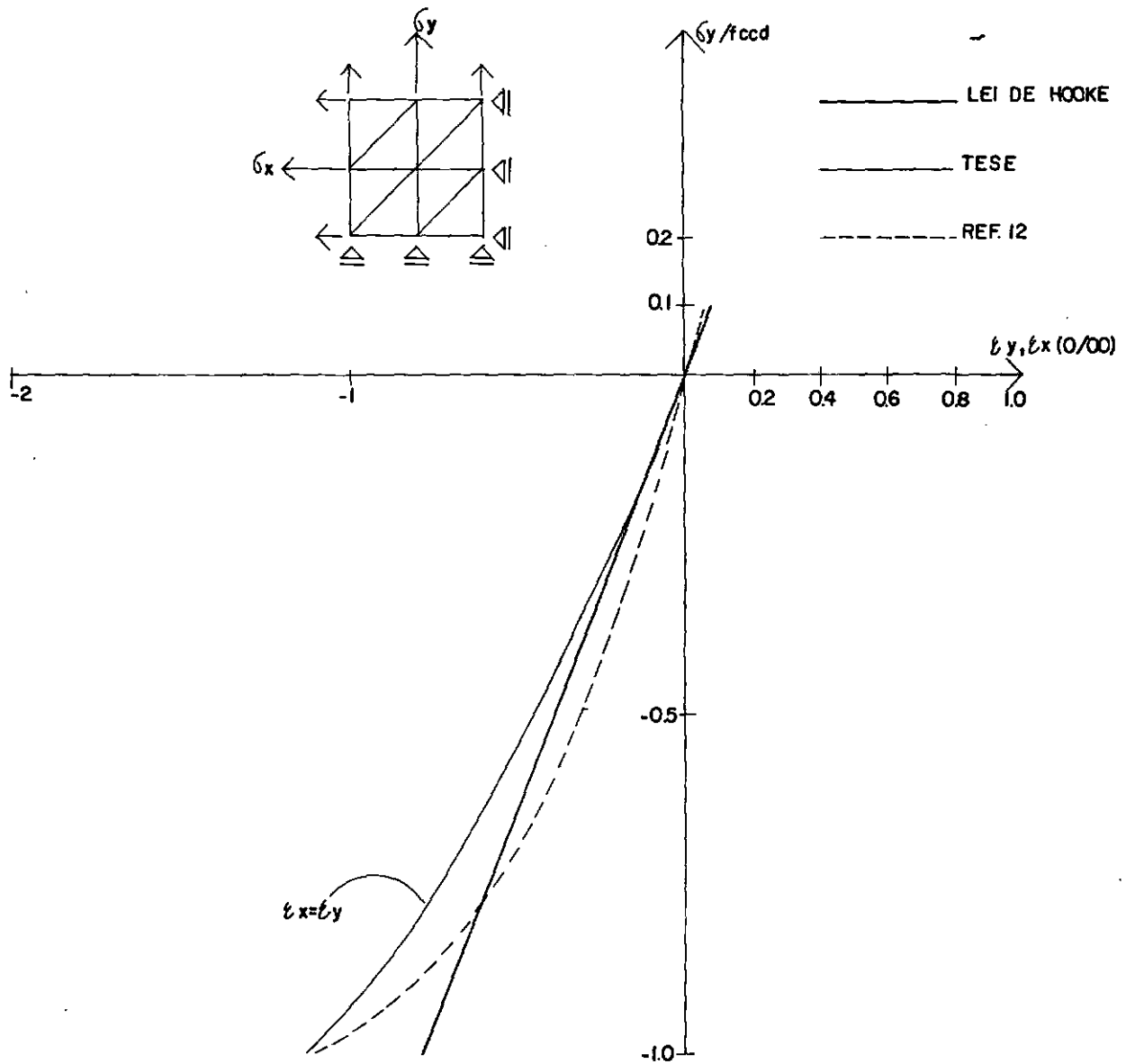


Figura 6.8 - Carregamento 3

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\pm 1}{\pm 0.1}$$

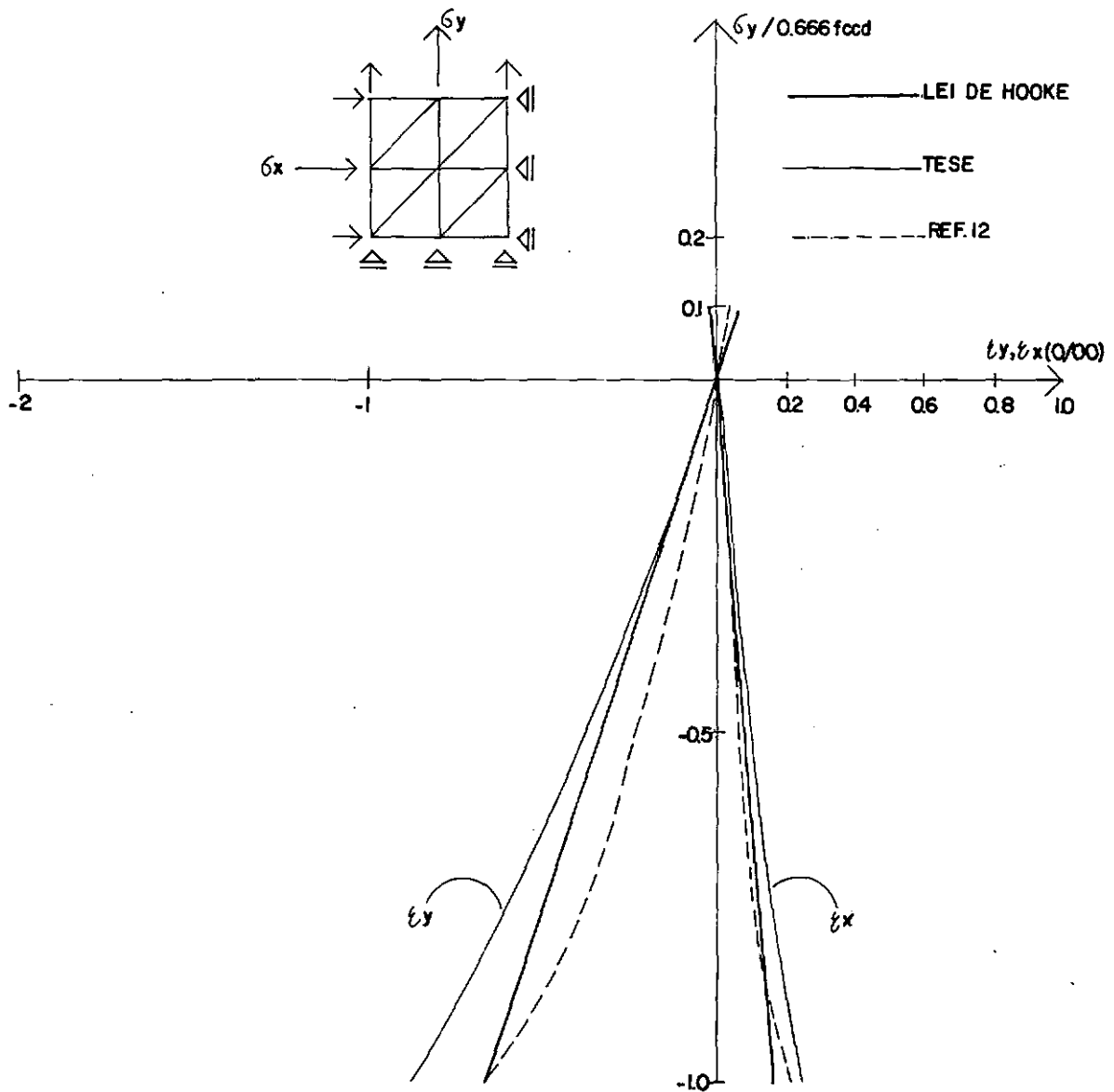


Figura 6.9 - Carregamento 4



O primeiro carregamento (Fig. 6.6), simula um estado uniaxial de tensões, servindo portanto como teste para o programa automático desenvolvido neste trabalho.

#### 6.4 - APLICAÇÃO II:

Estudo de concentração de tensões em furos circulares para peças planas submetidas a um estado plano de tensões. A discretização da peça foi feita conforme a figura 6.10.

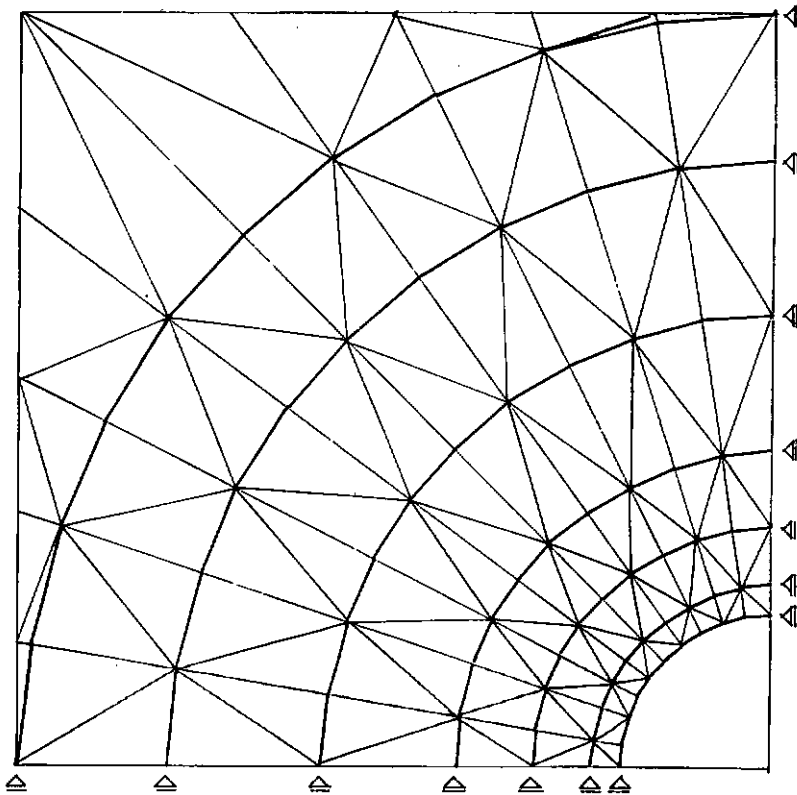


Figura 6.10 - Malha de elementos finitos da aplicação II

Analisa-se três casos de carregamentos e com para-os com as soluções propostas na referência [19] que considera o material elástico linear.

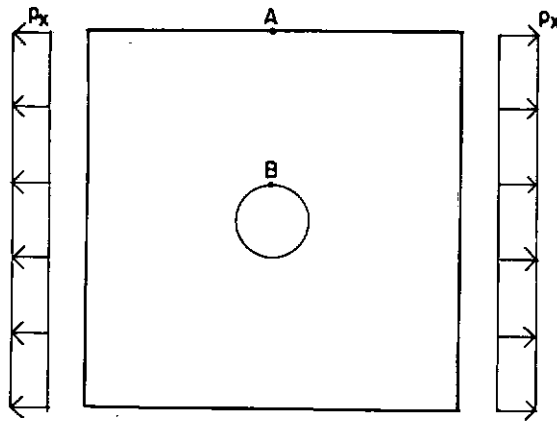


Figura 6.11 - Carregamento 1

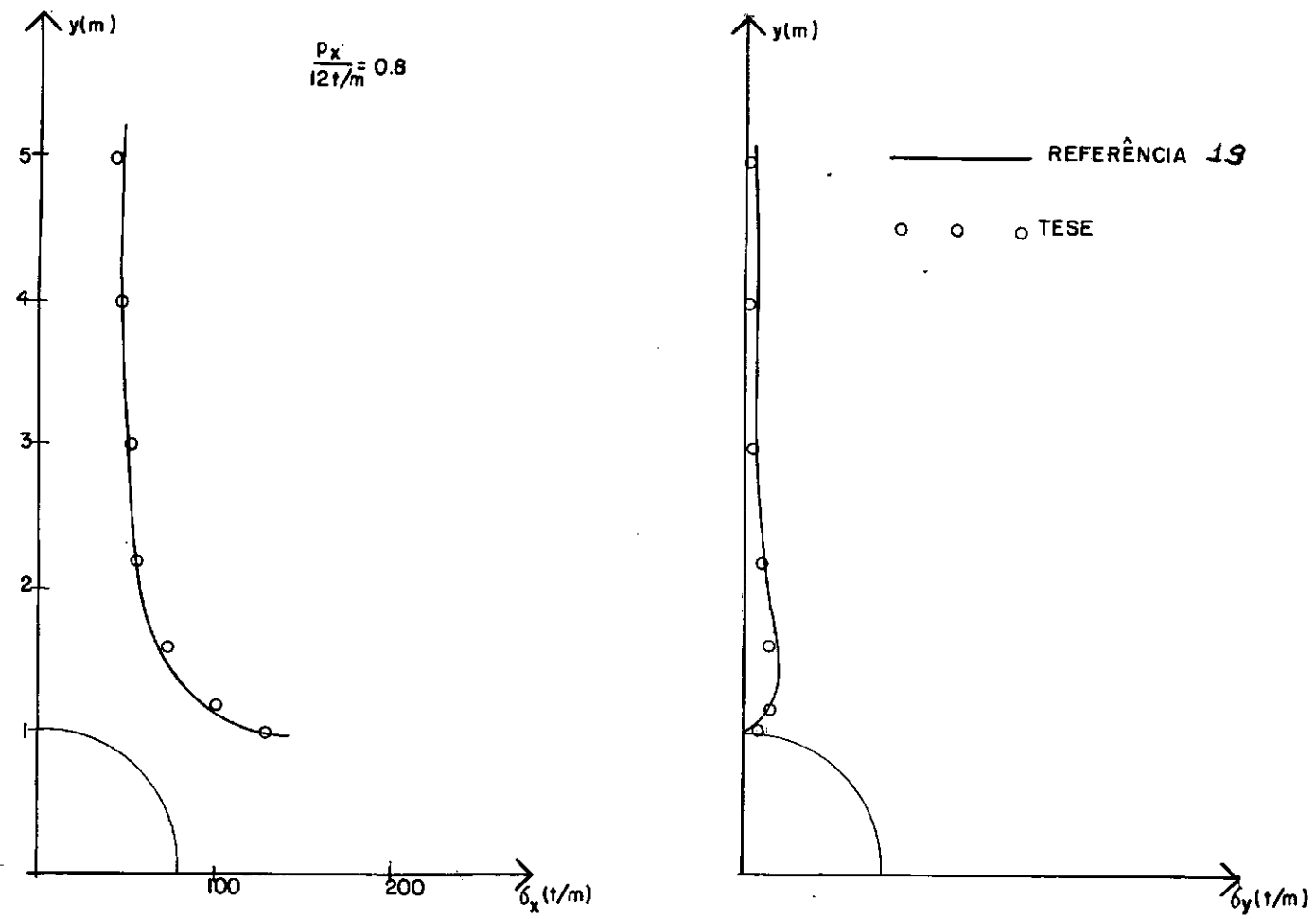


Figura 6.12 - Distribuição de tensões em  $\overline{AB}$  (carregamento 1).

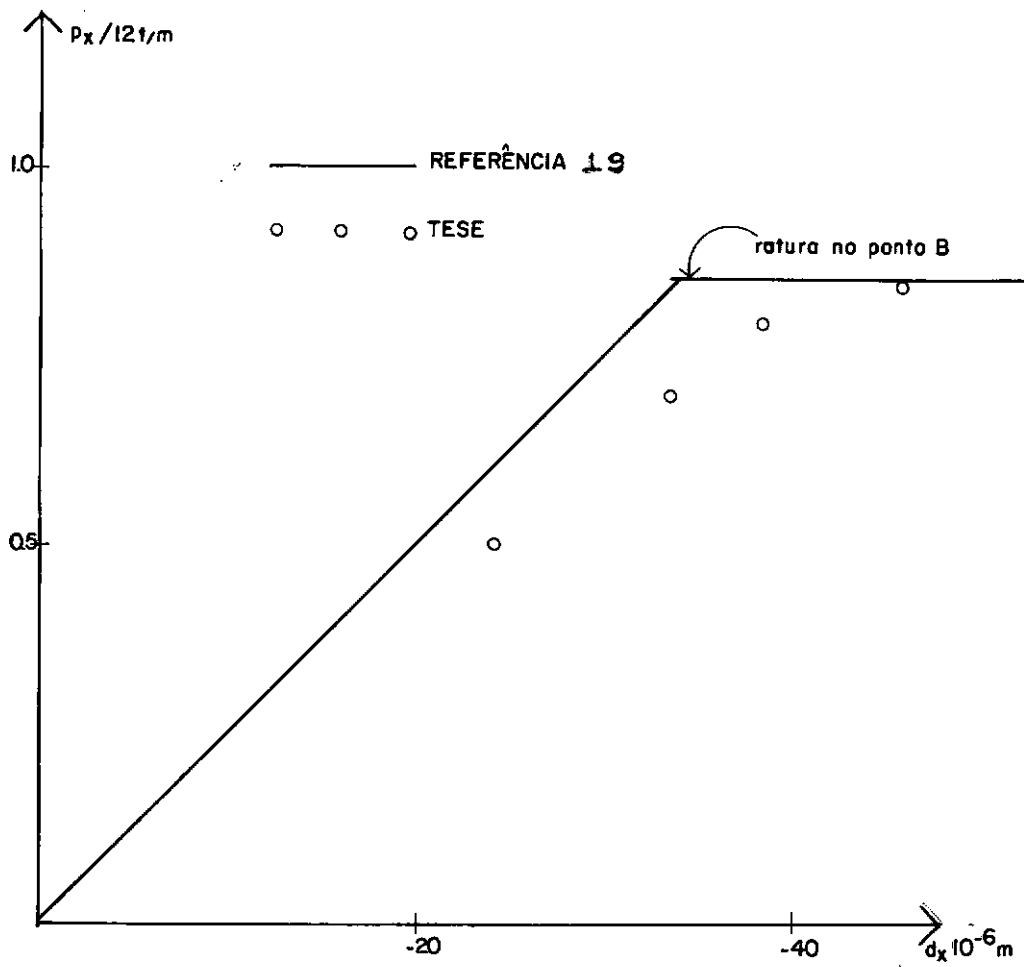


Figura 6.13 - Deslocamento vertical de B  $\times$  Variação da carga  $p_x$  (carregamento I)

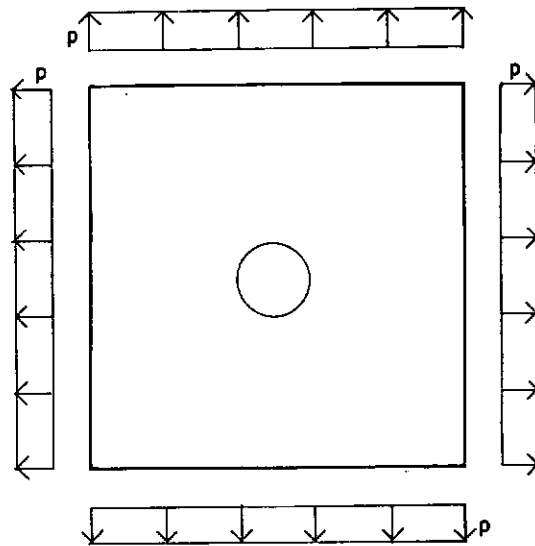


Figura 6.14 - Carregamento 2

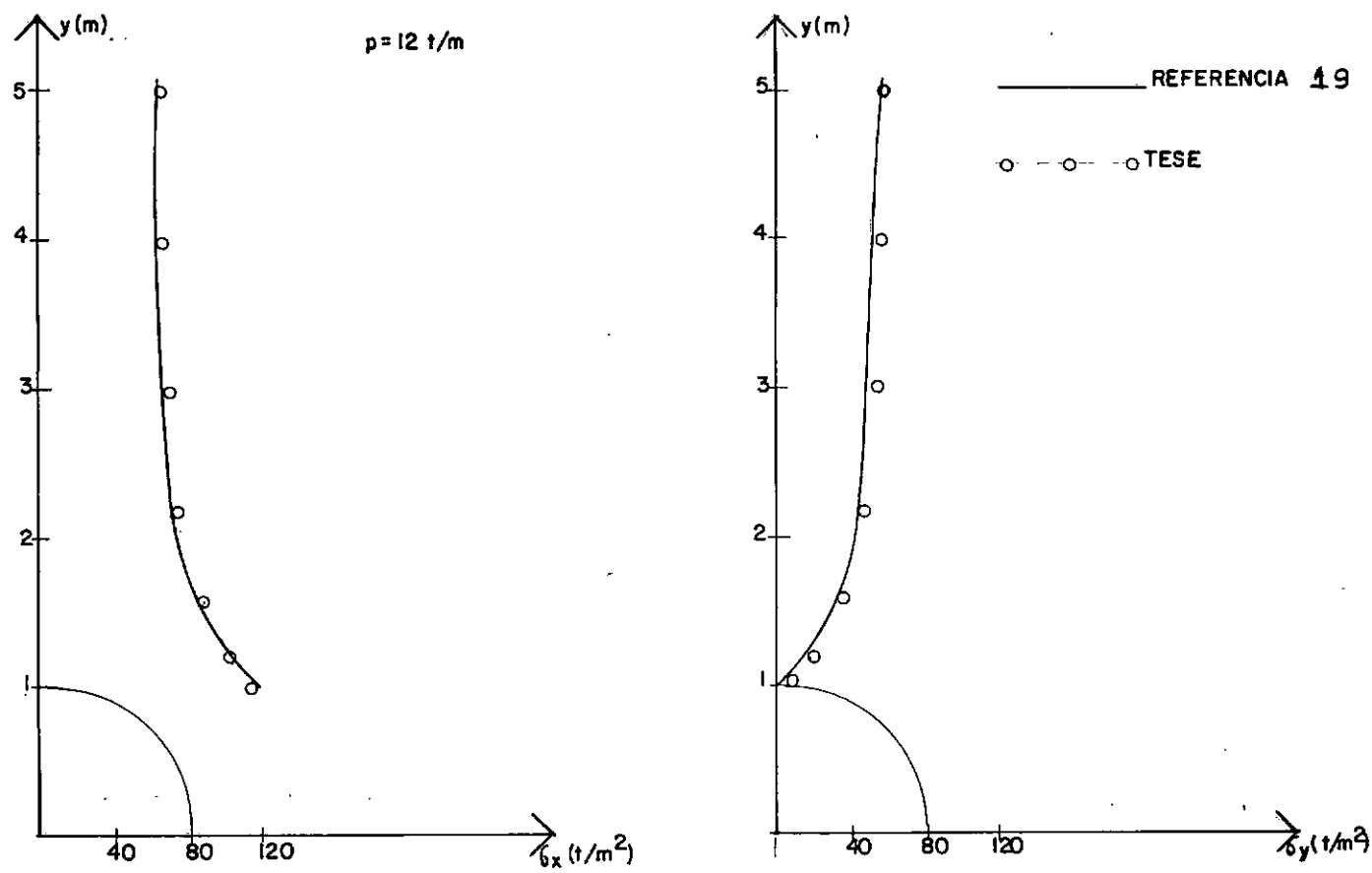


Figura 6.15 - Distribuição de tensões em  $\overline{AB}$  (carregamento 2)

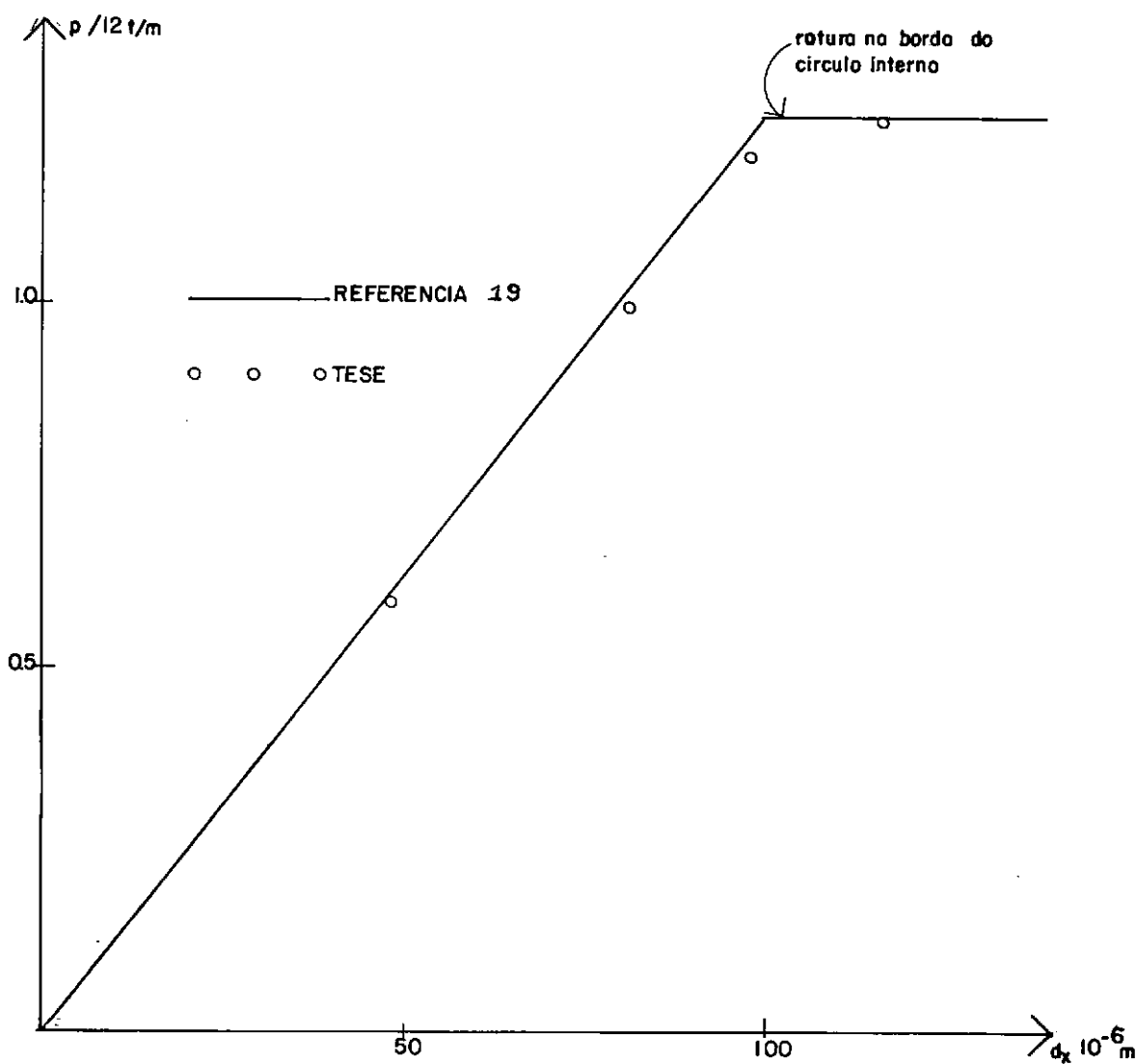


Figura 6.16 - Deslocamento vertical de B  $\times$  Variação da carga  $p_x$  (carregamento 2)

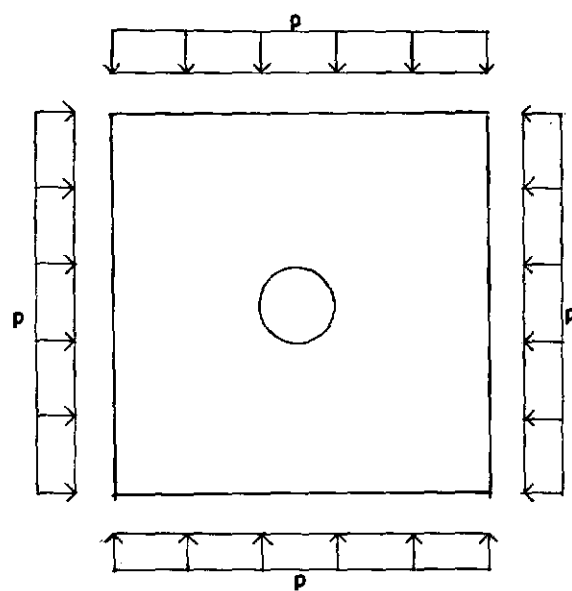


Figura 6.17 - Carregamento 3



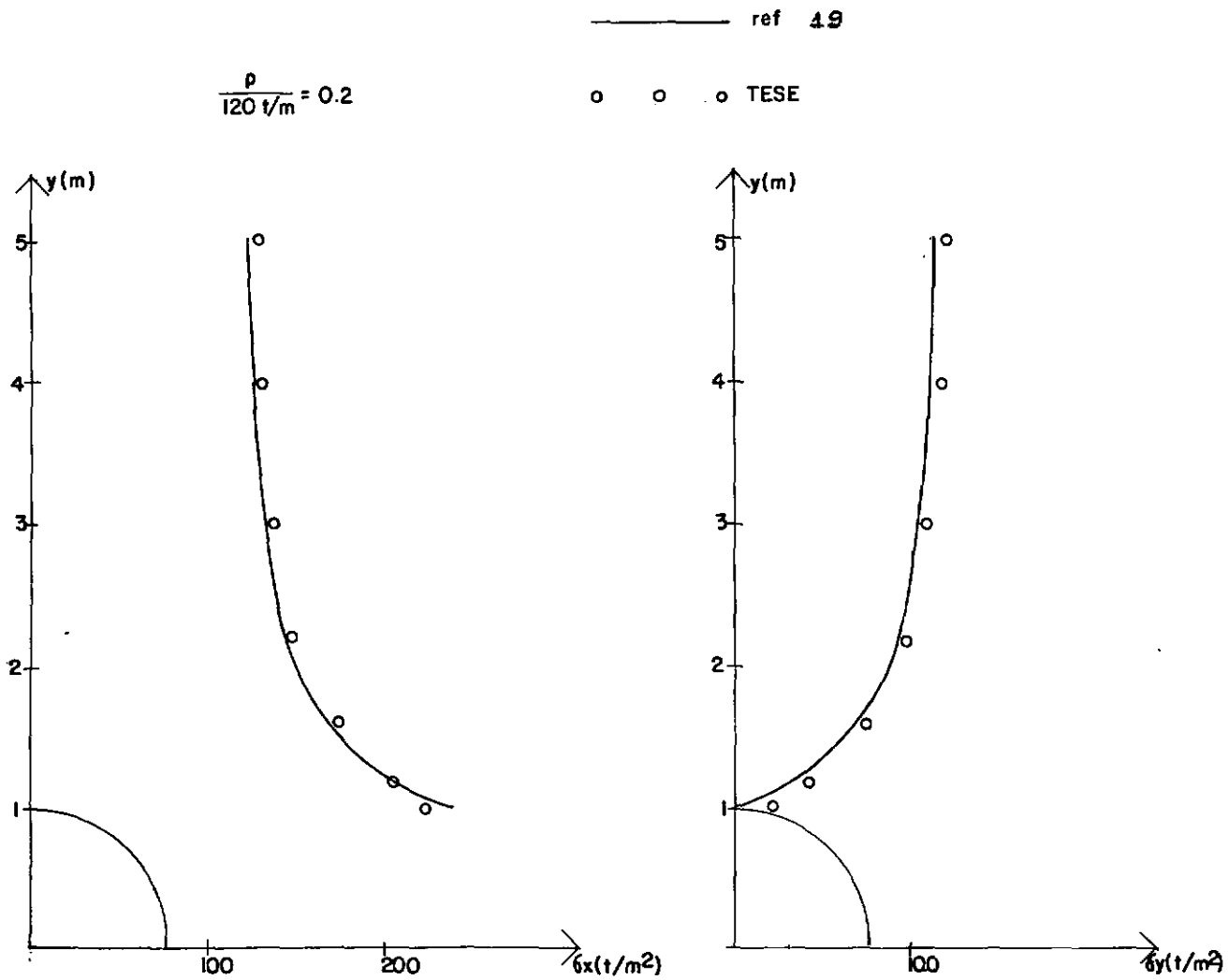


Figura 6.18 - Distribuição de tensões  $\overline{AB}$  (carregamento 3)

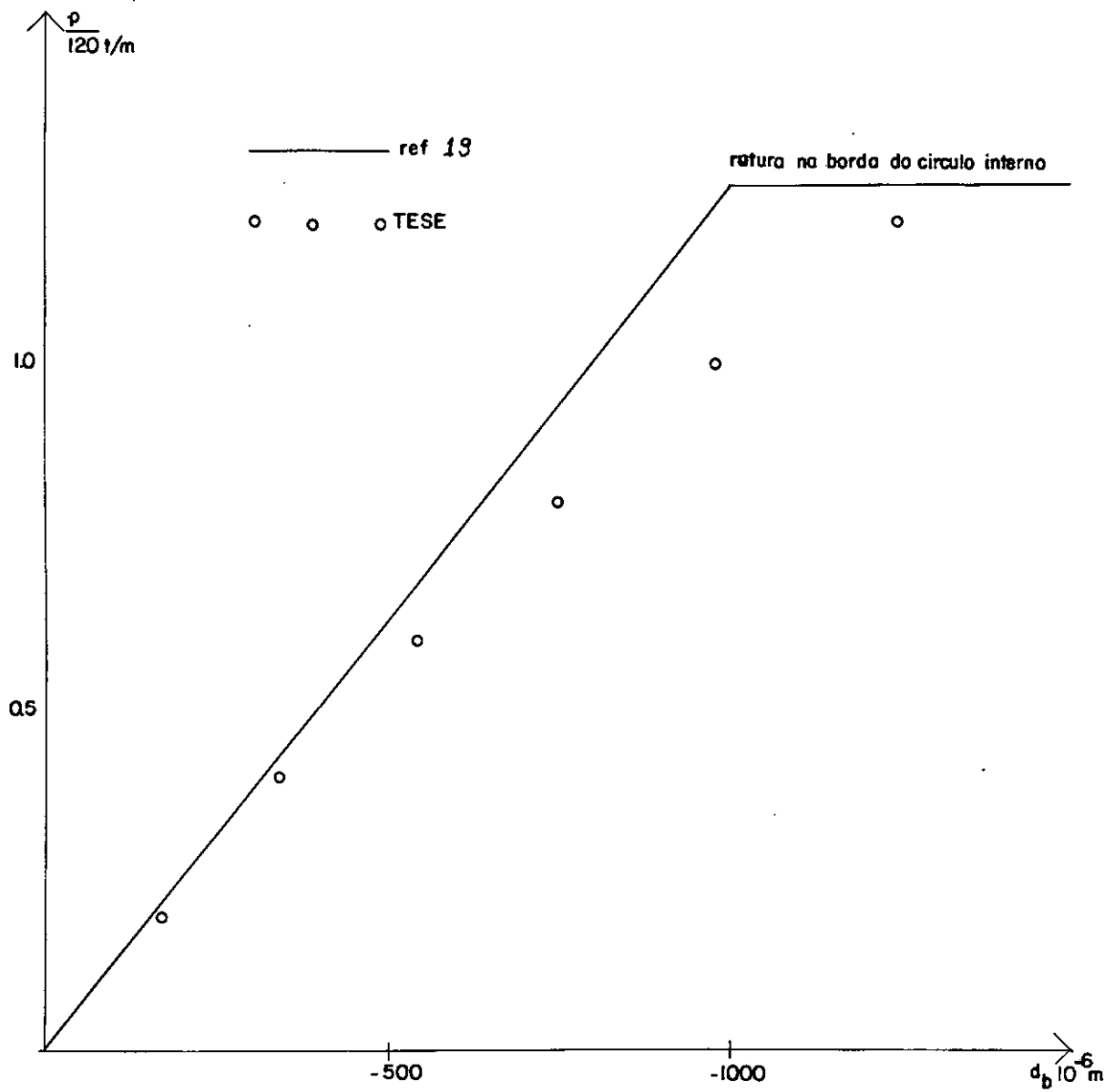


Figura 6.19 - Deslocamento vertical de B  $\times$  variação da carga  $p_x$  (carregamento 3)

### 6.5 - APLICAÇÃO III:

Estudo da distribuição do carregamento vertical em blocos de apoio, com seção transversal retangular. (Fig. 6.20). A discretização é a da Fig. 6.21.

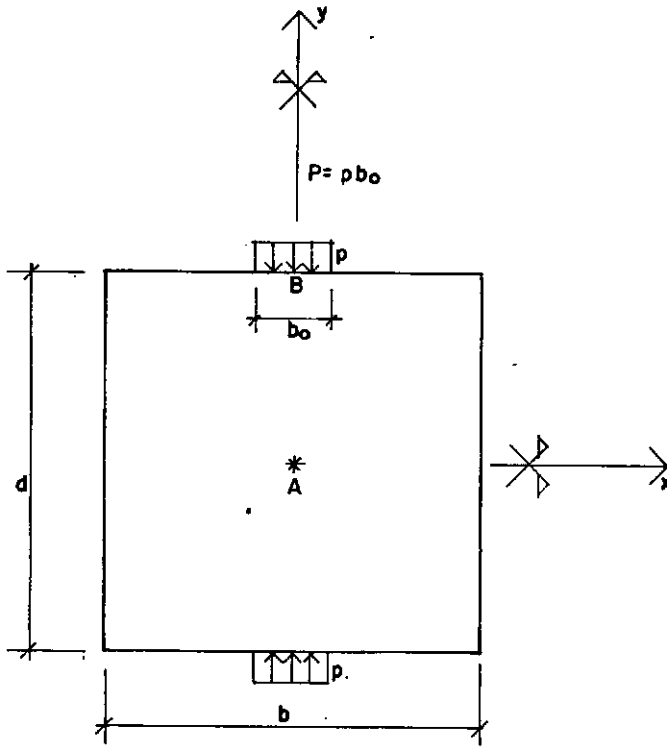


Figura 6.20 - Esquema estrutural de um bloco de apoio

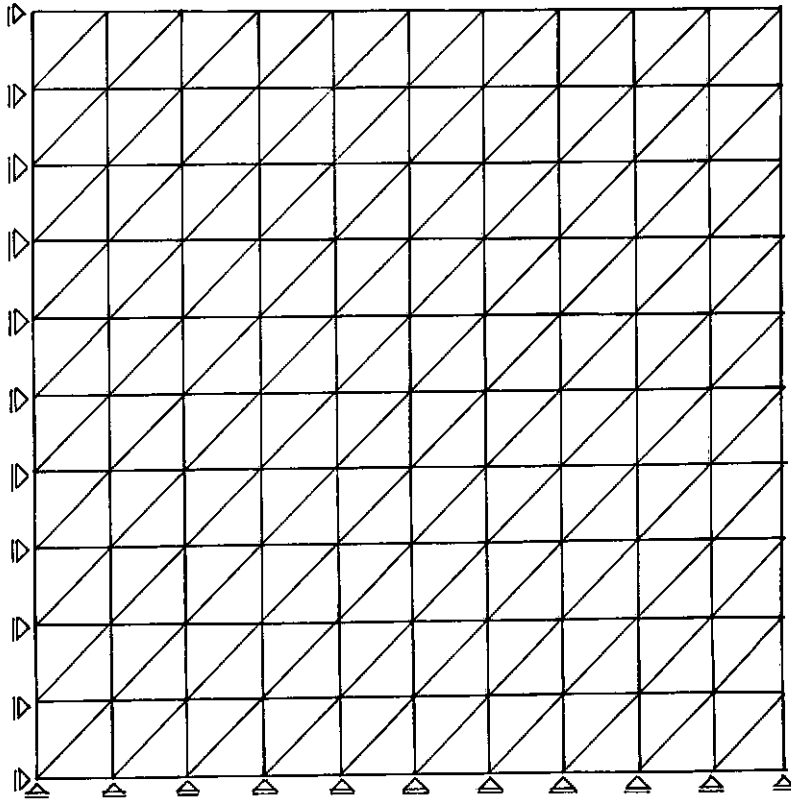


Figura 6.21 - Malha de elementos finitos da aplicação III

Como mostrado na figura 6.20 a carga está distribuída parcialmente no bloco ( $b_0 < b$ ) e variando a distância  $b_0$  obtem-se alguns tipos de roturas com suas respectivas cargas máximas resultantes ( $P = p \cdot b_0$ ). (Fig. 6.22).

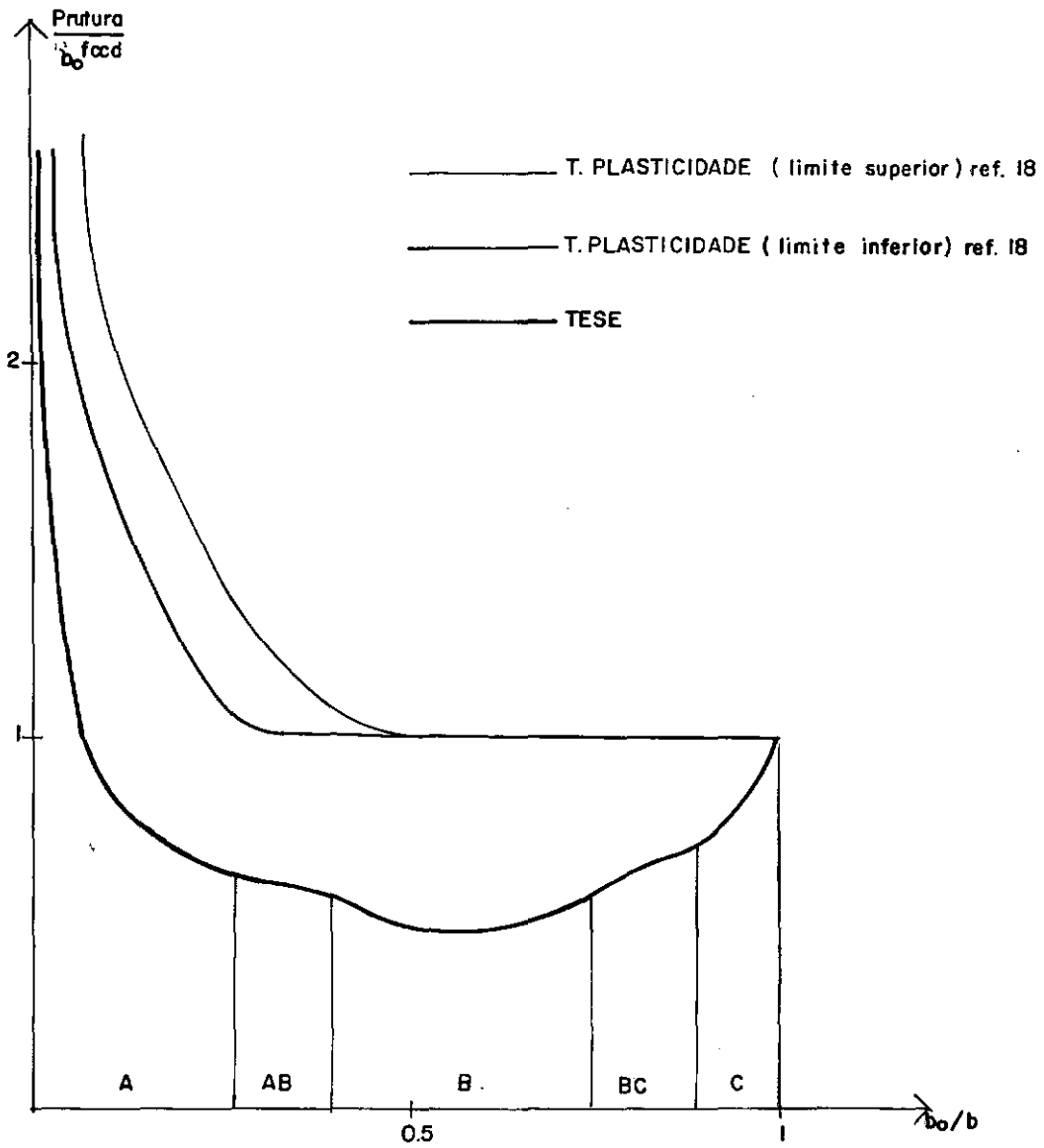


Figura 6.22 - Tipos de rotura em função de  $\frac{b_o}{b}$

As regiões que mostram os tipos de rotura (Figura 6.22) são:

- A - rotura localizada na região de aplicação do carregamento (puncionamento)
- B - rotura por tração (separação) na região central do bloco
- C - rotura total da peça por compressão (esmagamento)
- AB - região de transição ocorrendo as roturas do tipo A e B
- BC - região de transição ocorrendo as roturas do tipo B e C

Neste gráfico compara-se os resultados obtidos no presente trabalho com os obtidos aplicando a Teoria da Plasticidade [ref.18], na qual foram delimitadas, aproximadamente, regiões onde poderiam situar as soluções pela plasticidade. Observa-se que as primeiras soluções são inferiores as que ocorrem para a carga máxima devido a plastificação, concordante com as conclusões do trabalho já acima referido.

Na figura 6.23 está bastante clara a região em que na vizinhança do ponto central A rompe por tração (rotura por separação).

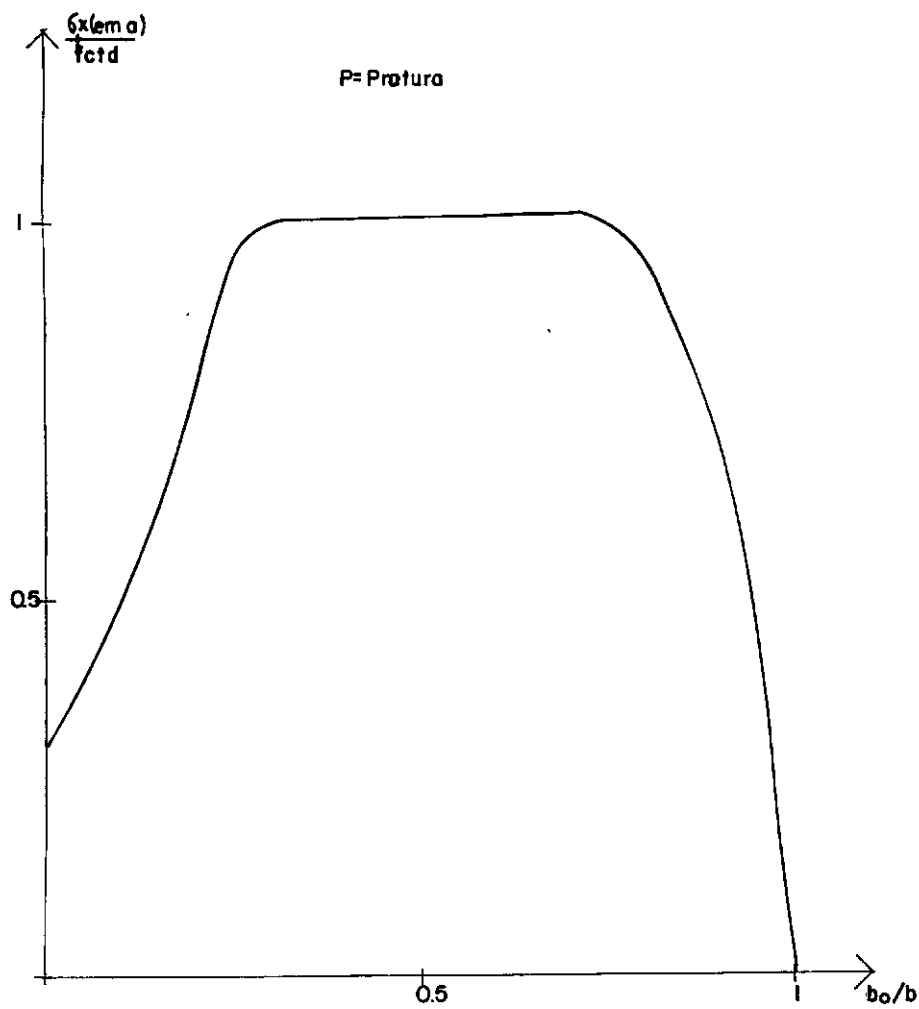


Figura 6.23 - Tração em  $\underline{A}$  em função de  $b_o/b$

Exemplifica-se a seguir alguns dos casos analisados:

$$a) \frac{b_o}{b} = 0,10$$

Rotura localizada na região de aplicação da carga (A). (Figura 6.24).

$$P_{\text{rotura}} = 225 \text{ t}$$

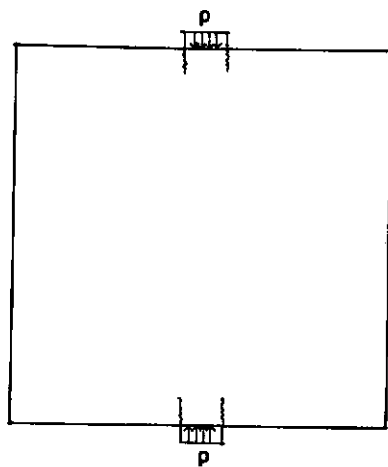


Figura 6.24 - Rotura do bloco -  $b_o/b = 0,10$



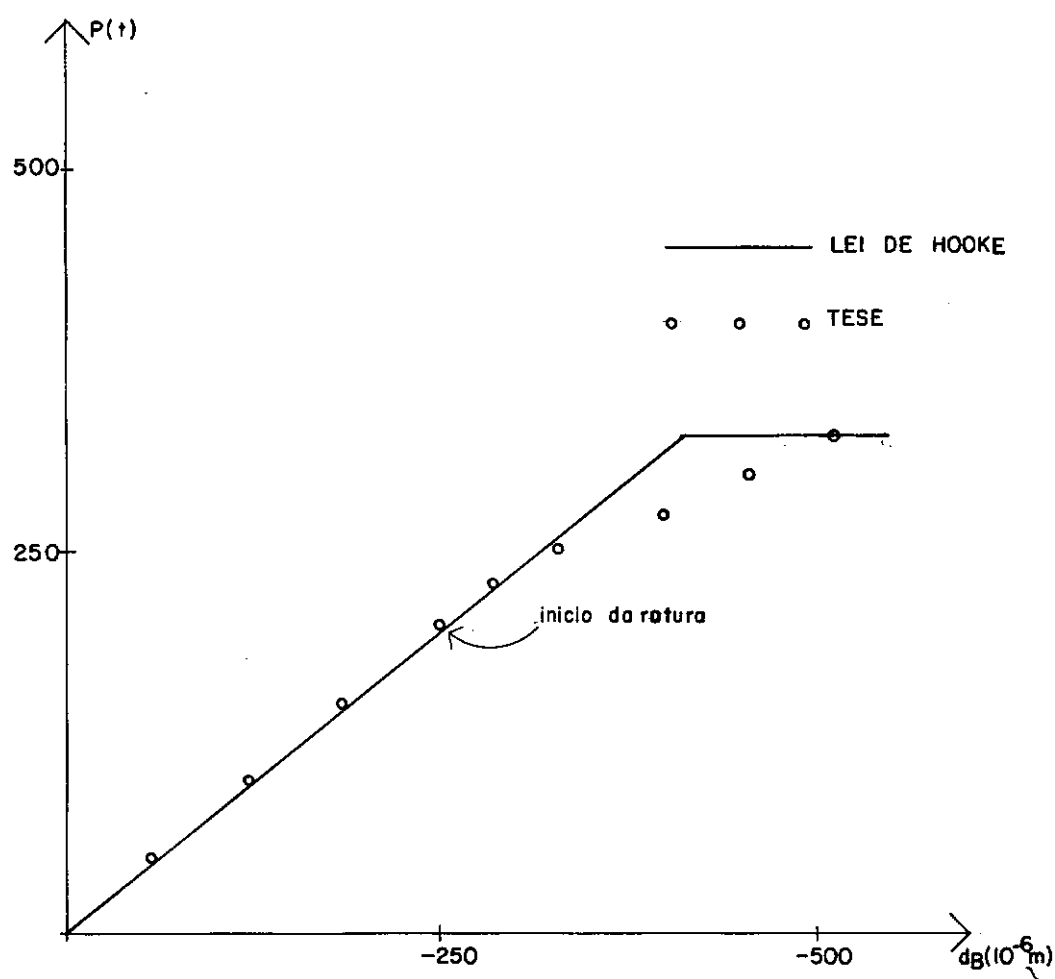


Figura 6.25 - Carga resultante ( $P$ )  $\times$  Deslocamentos verticais em B ( $b_o/b = 0,10$ )

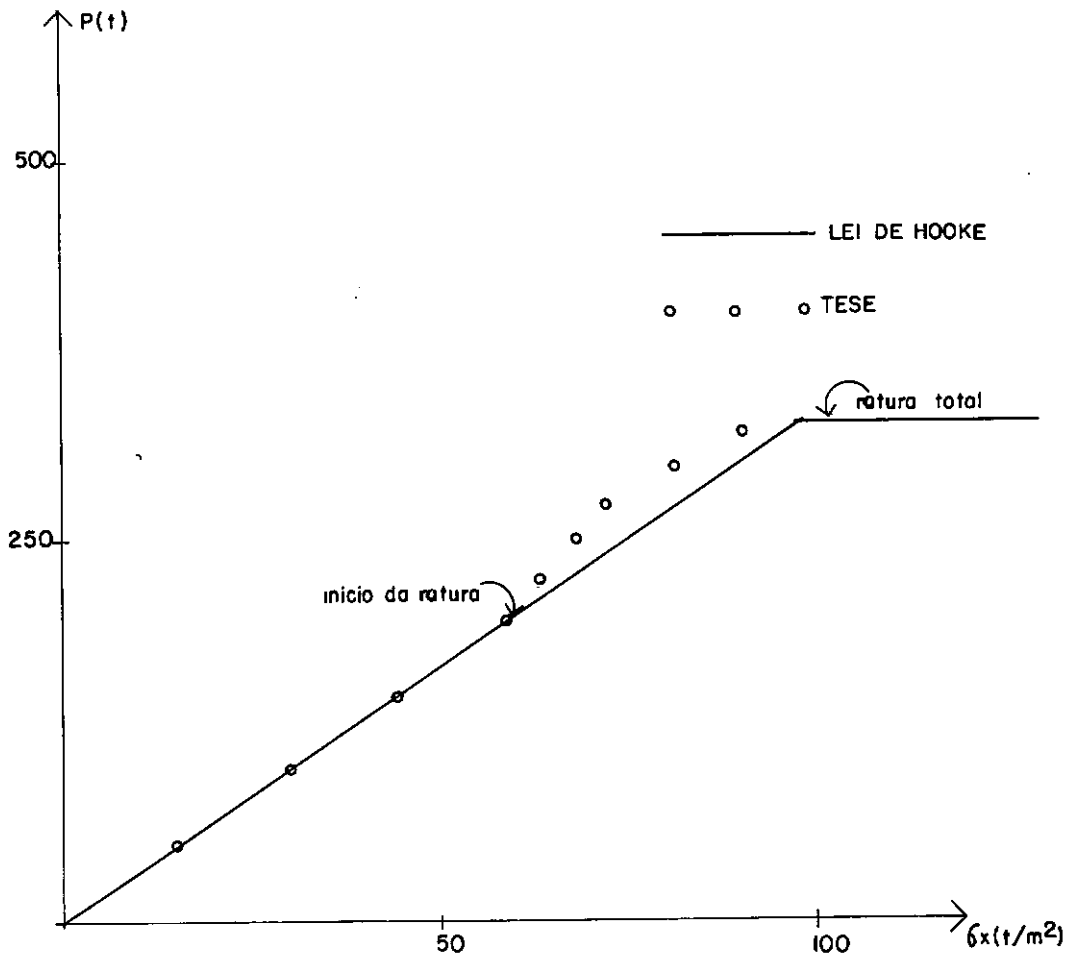


Figura 6.26 - Carga resultante ( $P$ ) Tensão horizontal em A ( $\sigma_x$ ). ( $b_o/b = 0,10$ )

$$b) \frac{b_o}{b} = 0,30$$

Rotura localizada e rotura por tração (AB).

(Figura 6.27)

$$P_{\text{rotura}} = 550 \text{ t}$$

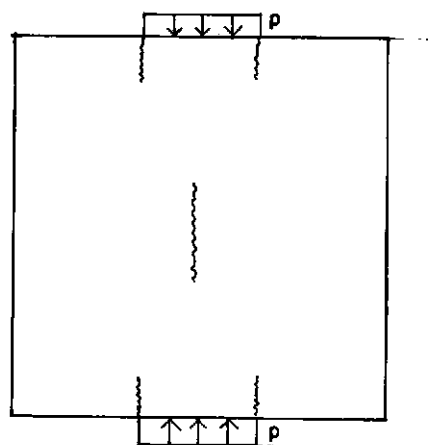


Figura 6.27 - Rotura do bloco -  $b_o/b = 0,30$

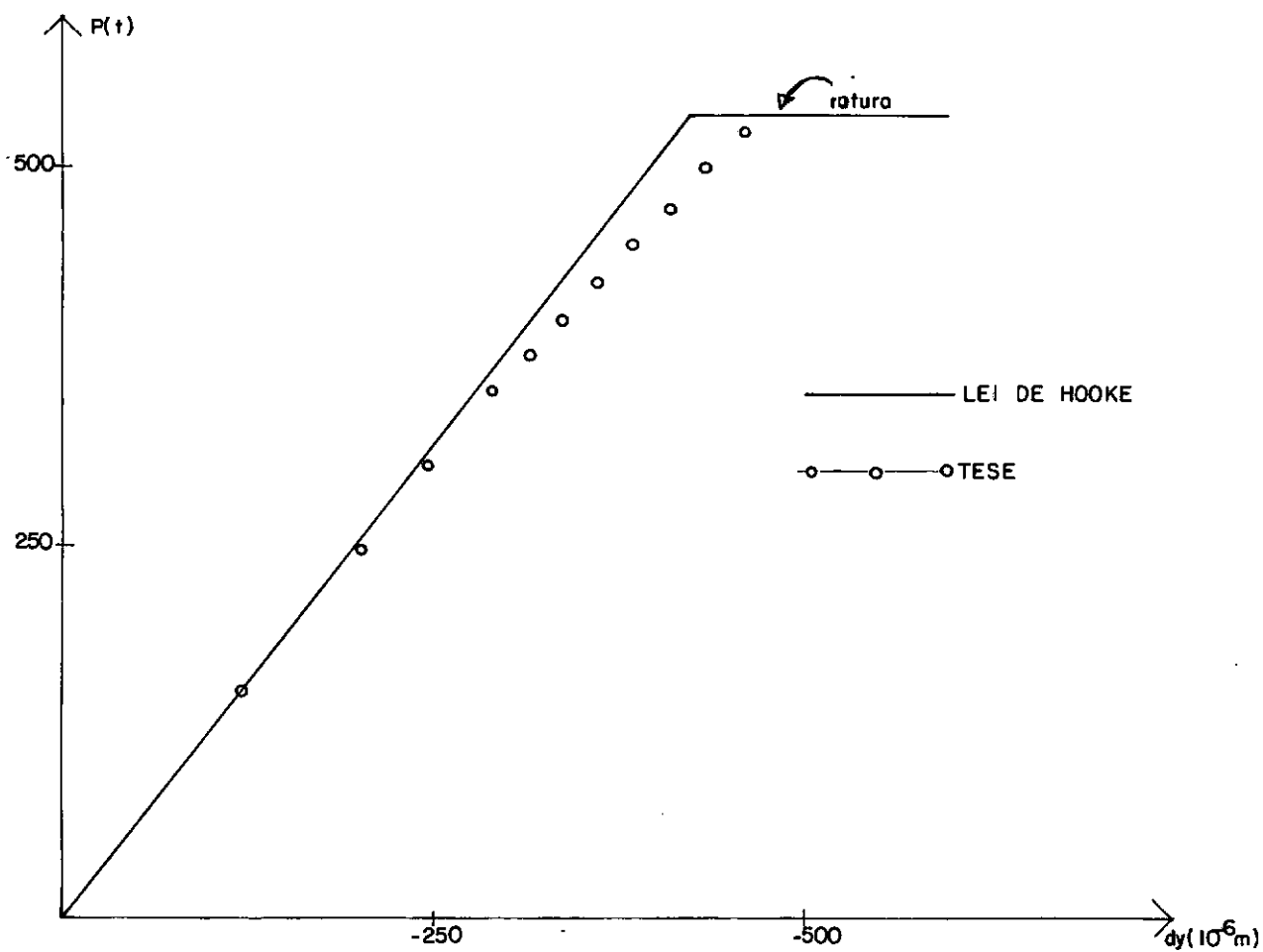


Figura 6.28 - Carga resultante ( $P$ )  $\times$  Deslocamentos verticais em B ( $b_o/b = 0,30$ )

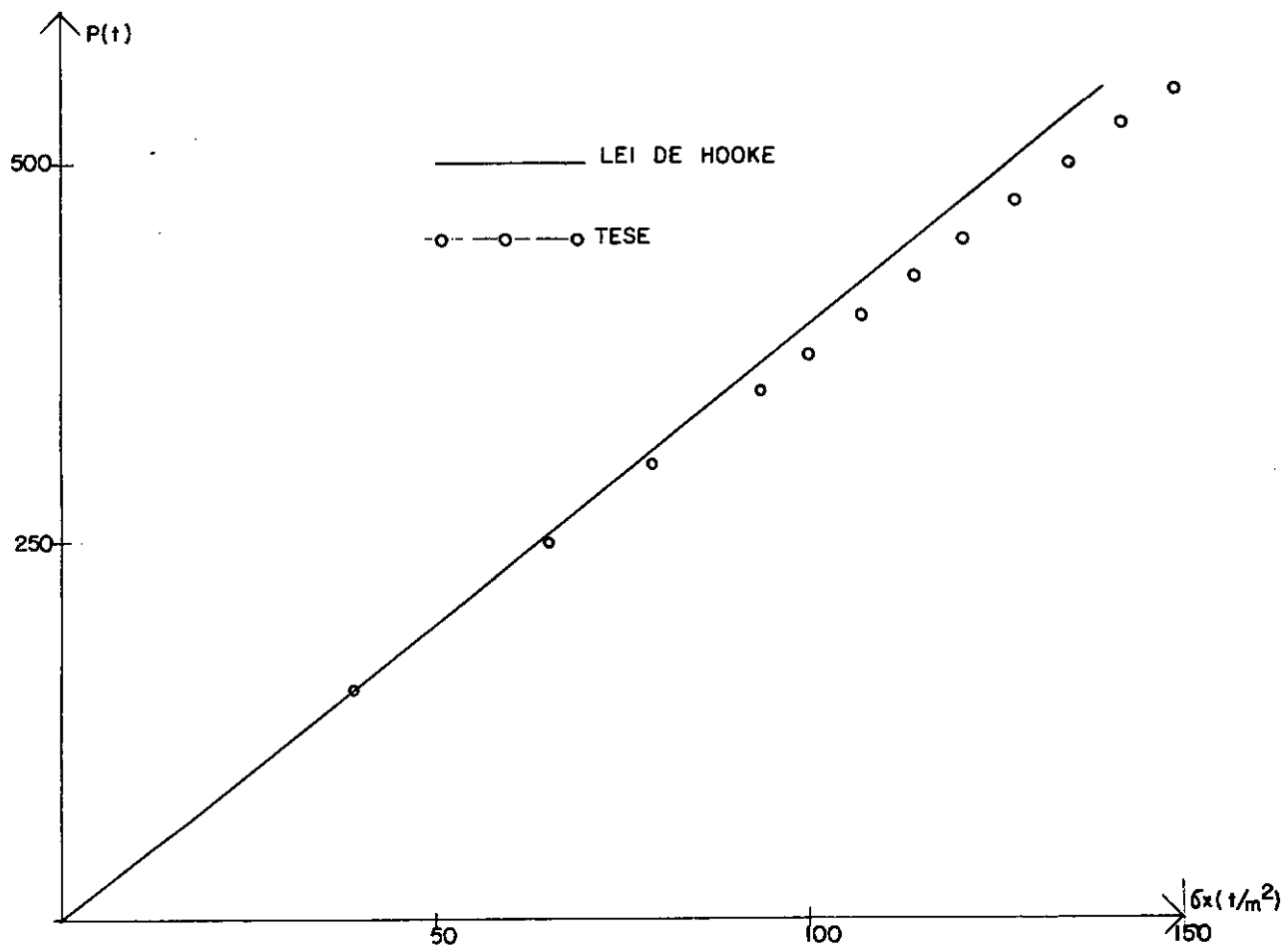


Figura 6.29 - Carga resultante ( $P$ )  $\times$  Tensão horizontal em A ( $\sigma_x$ ). ( $b_o/b = 0,30$ )

$$c) \frac{b_o}{b} = 0,90$$

Rotura total por compressão (C) . (Fig.6.30)

$$P_{\text{rotura}} = 1.900 \text{ t}$$

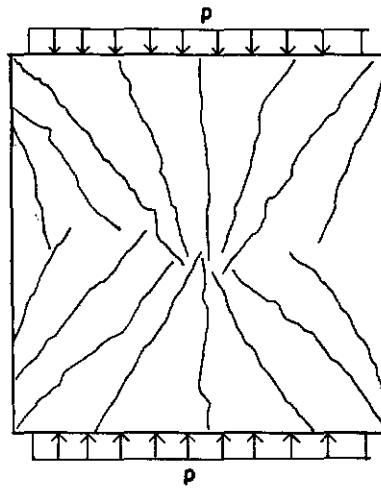


Figura 6.30 - Rotura do bloco -  $b_o/b = 0,90$

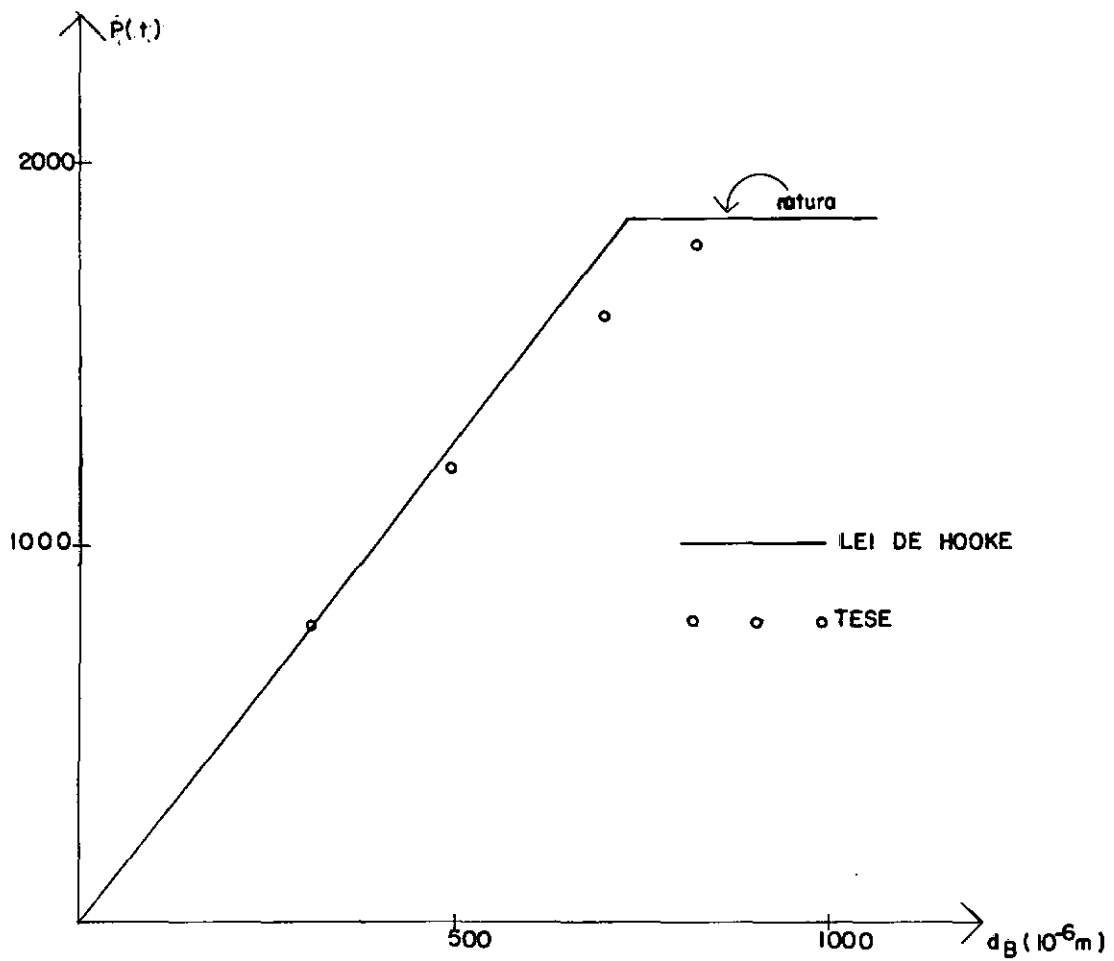


Figura 6.31 - Carga resultante ( $P$ )  $\times$  Deslocamentos verticais em B ( $b_o/b = 0,90$ ).

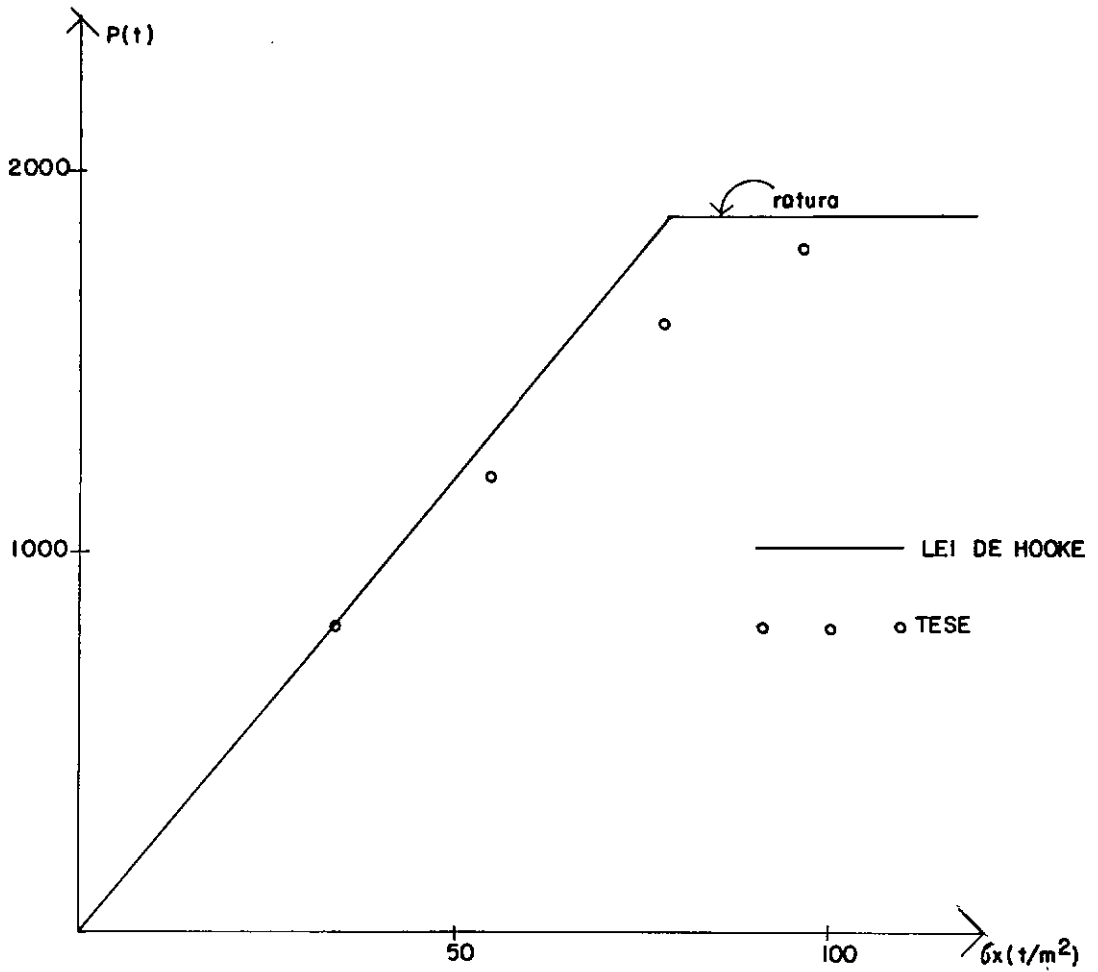


Figura 6.32 - Carga resultante  $(P) \times$  Tensão horizontal em A  $(\sigma_x)$  ( $b_o/b = 0,90$ )



## VII - CONCLUSÃO

O programa automático, desenvolvido neste trabalho, enfoca a não linearidade das equações constitutivas e os critérios de rotura do material, programados na subrotina NO-LIN. As subrotinas RIGID, ELAST e INCRE são relativas ao elemento TRIM 3. Conclui-se que o programa principal, fundamentado num algoritmo de resolução de sistemas de equações não lineares, pode analisar outros tipos de não linearidades bastando somente modificar as subrotinas anteriores.

Ao analisar-se a primeira aplicação, um aspecto interessante observado é que, nas curvas experimentais, o concreto inicialmente é mais rígido que nas relações adotadas, porém ao caminhar-se para a rotura esta diferença decresce, mesmo assim, o caráter não linear das equações constitutivas foi evidenciado.

No primeiro carregamento da segunda aplicação a diferença obtida entre a solução por este trabalho e a teórica (fig.6.13) é interpretado como um decréscimo de rigidez devido a tensões de compressão em algumas regiões da estrutura. Entretanto, o segundo carregamento fornece excelentes resultados, comparados ao teórico (fig.6.16), porque as tensões de compressões são desprezíveis enquanto que as tensões de trações são consideráveis, originando, assim, uma análise linear quanto às equações constitutivas. Para o terceiro carregamento, apenas inverteu-se o sinal do anterior, originando campos de tensões de compressão com valores próximos da rotura do material e a solu-

ção obtida (fig.6.19) diferiu da teórica devido a não linearidade desta análise.

Na terceira aplicação preocupou-se mais com os critérios de rotura do material; observando que na região B (fig.6.22) os campos de tensões são de tração e, portanto, a análise apresenta um comportamento próximo ao linear, enquanto que na região C a não linearidade do problema foi mais acentuada.

Nas observações vistas acima e pelos resultados experimentais [ref. 12 e 13], conclui-se que este tipo de análise não linear das equações constitutivas deve ser efetuado, quando o carregamento origina um campo de tensões próximo a rotura do material. Recomenda-se, portanto, a utilização deste trabalho para verificações à rotura. Para cargas de serviço com valores na vizinhança da metade da carga de rotura pode-se utilizar programas menos complexos.

Justifica-se o uso do elemento finito TRIM 3 porque, em geral, as malhas para a análise de roturas são refinadas, portanto, não é necessário um elemento refinado.

É importante observar que o estado limite último das aplicações do presente trabalho foi a da rotura do primeiro elemento.

Como extensão deste trabalho tem-se os seguintes assuntos:

- a) Utilização de outras relações constitutivas conjugadas a um estudo experimental.

- b) Análise de problemas tridimensionais com não linearidade física.
- c) Incorporação dos termos não lineares nas equações cinemáticas (2.4).
- d) Estudo da plastificação do material, com critérios adequados.
- e) Adaptação do trabalho, com algumas das extensões anteriores , para elementos finitos isoparamétricos.

# BIBLIOGRAFIA

- 1 - V.V.Novozhilov - "Theory of Non Linear Elasticity" -  
Grayloc Press - 1953
- 2 - Arthur H.Nilson - "Non Linear Analysis of Reinforced  
Concrete by Finite Element Method" -  
A.C.I. Journal - Setembro de 1968
- 3 - Danilo Sili Borges - "Análise Não Linear de Estruturas pelo  
Método dos Elementos Finito" -  
L.N.E.C. - Setembro de 1970
- 4 - B.Saugy e Th.Zimmermann - "Analyse Non Linéaire des  
Structures Massives" -  
I.T.B.T.P. - 292 - Abril de 1972
- 5 - J.Cannor e Y.Sarne - "Lecture Notes on Finite Element  
Analysis of Phisically Nonlinear Systems" -  
Int.Symp. on Discret Meth. in Eng. - Milan - Setembro  
de 1974
- 6 - Zienkiewicz - "The Finite Element Methods in Engineering  
Science" -  
McGraw Hill - 1971
- 7 - E.R.Arantes de Oliveira - "Introdução à Teoria das Estrutu-  
ras de Comportamento Linear" -  
Bertrand - 1966
- 8 - L.R.Calcote - "The Analysis of Laminated Composite  
Structures" -  
Van Nostrand Reinhold Cia. - 1969
- 9 - M.N.Iakoulev - "On Some Methods of Solving Nonlinear  
Equations" -  
Tech.Report(68-75) - University of Maryland - Julho de 1968
- 10 - J.T.Oden - "Notas de Aula sobre a Teoria Matemática do Método  
dos Elementos Finito" -  
COPPE/UFRJ - Maio de 1974

- 11 - Humberto L.Soriano - "Formulação dos Métodos de Gauss e Cholesky para Análise Matricial de Estruturas" - COPPE/UFRJ - 11 - Julho de 1972
- 12 - Helmut Kupfer - "Das Verhalten des Beton Unter Mehrachsiger Kurzzeit Belastung Unter Besonderer Berücksichtigung der Zweiachsigen Beanspruchung" - Deutscher Ausschuss für Stahlbeton - Heft 229 - 1973
- 13 - H.Kupfer, H.K.Hilsdorf, H.Rusch - "Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses" - A.C.I. Journal - Agosto de 1969
- 14 - Y.C.Fung - "Foundations of Solids Mechanics" - Prentice Hall Inc. - 1965
- 15 - J.T.Oden - "Finite Elements of Nonlinear Continuum" - McGraw Hill - 1972
- 16 - B.M.Irons e R.C.Tuck - "A Version of the Aitken Accelerator for Computer Iteration" - Int. Journal of Num. Meth. in Eng. 1 - 1969
- 17 - Comité Européen du Béton - "Recommandations Internationales pour le Calcul et l'Exécution des Ouvrages en Béton" - 1972
- 18 - F.B. Lobo Carneiro - "Aplicação da Teoria da Plasticidade ao Concreto" - COPPE/UFRJ - 1 - Março de 1968
- 19 - N.I.Muskhelishvili - "Some Basic Problems of the Theory of Elasticity" - Gronigen, Holanda - 1953

APÊNDICE A - MANUAL DE UTILIZAÇÃO DO PROGRAMAA.1) - Cartões a serem lidos:

VARIÁVEIS	NÚMERO DE CARTÕES	FORMATO
a) Para cada problema:		
NPROB,IET	1	2I10
TIT	1	20A4
NP,NE,NCC,NTM,INX	1	6I10
RC,RT,EUC,EUT	1	4F10.5
(ORT(1,L),L=1,5)	1	5F10.0
I,ESP(I)	NTM	I10,F10.0
LIA(I),CORD(L,1),CORD(I,2)	NP	I5,2F10.4
M,(LIST(M,I)I=1,3),IMAT(M)	NE	5I10
NNR(k),NTC(k),		
REC(k,1),REC(k,2),AG(k)	NCC	2F10,3F10.3
b) Para cada carregamento (NC):		
NI,ERRO,ITMAX	1	I10,F10.0,F10
NI>1:(RESO(J),J=1,NI)	NI/8	8F10.0
NA,VA(1),VA(2)	Número de cargas	I10,2F10.2
Cartão Branco	1	-

## A.2) - Significado das variáveis:

NPROB	> 0	Começa um problema
	≤ 0	Termina um problema
IET	= 1	Estado plano de tensões
	= 2	Estado plano de deformações
TIT		Comentário para título
NP		Número de pontos nodais da estrutura
NE		Número de elementos da estrutura
NCC		Número de condições de contorno de estrutura
NC		Número de casos de carregamento
NTM		Número de tipos de espessura
INX	= 0	Gera as coordenadas automaticamente
	≠ 0	Não tem geração
RC		Resistência à compressão do concreto
RT		Resistência à tração do concreto
EUC		Máxima deformação de compressão
EUT		Máxima deformação de tração
ORT		Propriedades iniciais do material
ESP		Espessura do elemento por tipo
LIH		Número do nó
CORD		Coordenada dos nós
LIST		Incidência dos nós
IMAT		Tipo de espessura do elemento
NNR		Número do nó com restrição (apoios)
NTC	= 1	Restrição aos deslocamentos na direção y
	= 10	Restrição aos deslocamentos na direção x
	= 11	Restrição aos deslocamentos nas 2 direções
REC		Recalque de apoio
AG		Ângulo entre a direção do apoio e o eixo dos x
NI		Número de incrementos
ERRO		Erro admissível no cálculo iterativo
ITMAX		Número máximo de iterações permitidas
NA		Número do nó com carga aplicada
VA(L)		Valor da carga aplicada: L=1 - Componente horizontal L=2 - Componente vertical

```

C === PROGRAMA PRINCIPAL DE ANALISE DE ESTADO PLANO DE TENSOES E DEFORMA PRINC 1
      IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z) PRINC 2
      DIMENSION TIT(20),NNR(70),NTC(70),REC(70,2),AG(71),ESP(25),PE$O(20 PRINC 3
*) ,E(3,3),PROP(5) PRINC 4
      DIMENSION V(400),CORD(200,2),Q(400),DESL(400),QZ(400),BETA(400)
      DIMENSION ORT(300,5),LIST(300,3),IMAT(300),FORCE(300,6),DEF(300,6)
*) ,IR(300)
      COMMON LR,LW PRINC 8
      DEFINE FILE 12(574,640,U,ID)
      LR=5 PRINC 10
      LW=6 PRINC 11
402 READ(LR,1)NPROB,IET PRINC 12
      1 FORMAT(2I10) PRINC 13
      IF(NPROB)400,400,401 PRINC 14
401 WRITE(LW,2) PRINC 15
      2 FORMAT(1H1,4X,0PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL0,8X,0-0,8X,0COPPE/UFRJ PRINC 16
*) ,/5X,62(0-0),/5X,0ANALISE NAO LINEAR DE ESTADO PLANO DE TENSOES PRINC 17
*) E DEFORMAC0FS0,/5X,62(0-0),/5X,0ELEMENTO TRIM 30,20X,0ARTUR OBIN PRINC 18
*) 0 NETO0/5X,62(0-0)) PRINC 19
      GO TO (300,301),IET PRINC 20
300 WRITE(LW,3)NPROB PRINC 21
      3 FORMAT(/,5X,0ANALISE NUMERO0,I4,3X,0-0,3X,0ESTADO PLANO DE TENSOE PRINC 22
*) S0) PRINC 23
      GO TO 302 PRINC 24
301 WRITE(LW,4)NPROB PRINC 25
      4 FORMAT(/,5X,0ANALISE NUMERO0,I4,3X,0-0,3X,0ESTADO PLANO DE DEFORM PRINC 26
*) ACOES0) PRINC 27
-----302 NGL=2 PRINC 28
      NNO=3 PRINC 29
C === LEITURA DOS DADOS BASICOS DA ESTRUTURA PRINC 30
      CALL DADOS(NP,NC,TIT,NE,NCC,REC,CORD,LIST,IMAT,ORT,NNR,NTC,NNO PRINC 31
*) ,AG,ESP,RC,RT,EUC,EUT) PRINC 32
      DO 15 I=1,5 PRINC 33
15 PROP(I)=ORT(1,I) PRINC 34
      NEQ=NP*NGL PRINC 35
      DO 405 KI=1,NC PRINC 36

```



DO 20 J=1,NE	PRINC 37
DO 20 I=1,S	PRINC 38
ORT(J,I)=PROP(I)	
20 CONTINUE	PRINC 41
C === LEITURA DE CADA CASO DE CARREGAMENTO,	PRINC 42
CALL CARRE(NEQ,KI,TIT,NGL,NP,V,NE,NNO,LIST,LF,LL,NI,ERRO,PESO,ITMA	PRINC 43
*X)	PRINC 44
DO 105 INE=1,NEQ	PRINC 45
DESL(INE)=0.	PRINC 46
QZ(INE)=1.	PRINC 47
105 BETA(INE)=1.	
DO 90 N=1,NE	PRINC 49
90 IR(N)=0	PRINC 50
DO 404 KK=1,NI	PRINC 51
C === CALCULO E IMPRESSAO DA CARGA FRACIONADA	PRINC 52
DO 100 INE=1,NEQ	PRINC 53
100 Q(INE)=V(INE)*PESO(KK)	PRINC 54
IT=0	PRINC 62
IDIF=0	PRINC 63
C === FORMACAO DO SISTEMA DE EQUACOES EM BLOCOS,	PRINC 65
200 WRITE(LW,710) IT	PRINC 67
710 FORMAT(/7X,8ITERACAO NO=8,I3)	PRINC 68
CALL FORMB(NEQ,NE,LIST,IMAT,CORD,ORT,NNO,NGL,NCC,NNR,NTC,Q,REC,	PRINC 69
*LF,LL,IC,IET,KK,AG,IT,ESP,E,ID)	
C === RESOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES	PRINC 71
CALL REBLO(IC,LF,LL,NEQ,Q,ID)	PRINC 72
IF(IT,EQ,0) GO TO 330	PRINC 79
DO 350 INE=1,NEQ	PRINC 80
IF(DESL(INE),EQ,0.) GO TO 320	PRINC 81
DIFR=DABS(Q(INE)/DESL(INE))	PRINC 82
IF(DIFR-ERRO) 320,320,330	PRINC 83
320 IDIF=0	PRINC 84
350 CONTINUE	PRINC 85
GO TO 360	PRINC 86
330 IDIF=1	PRINC 87
C === CALCULO DO FATOR DE ACELERACAO DA ITERACAO BETA	PRINC 88

360	DO 797 INE=1,NEQ	PRINC 89
	DEL2=QZ(INE)-Q(INE)	PRINC 90
	QZ(INE)=Q(INE)	PRINC 91
	TOP=Q(INE)*DEL2	PRINC 92
	DEN=DEL2*DEL2	PRINC 93
	IF(IT*IDIF.FQ.0) GO TO 798	PRINC 94
	IF(DEN.EQ.0.) GO TO 798	PRINC 95
	BETA(INE)=BETA(INE)+(BETA(INE)-1.)*TOP/DEN	PRINC 96
C ==	ACUMULACAO DOS DESLOCAMENTOS	PRINC 97
	DESL(INE)=DESL(INE)+BETA(INE)*Q(INE)	PRINC 98
	GO TO 797	PRINC 99
798	DESL(INE)=DESL(INE)+Q(INE)	PRINC100
797	CONTINUE	PRINC101
C ==	TESTE PARA O CALCULO ITERATIVO	PRINC102
	IF(IDIF) 450,500,450	PRINC103
450	IT=IT+1	PRINC104
	IF(IT-ITMAX) 785,785,570	PRINC105
570	WRITE(LW,520) ITMAX	PRINC106
520	FORMAT(/8X,8 CALCULO ITERATIVO FOI EFETUADO MAIS DE8,13,8 VEZES8)	PRINC107
	WRITE(LW,550) KK	PRINC108
550	FORMAT(/8X,8 INCREMENTO NUMERO =8,15)	PRINC109
	GO TO 500	PRINC110
C ==	CALCULO DAS FORCAS EQUIVALENTES AO INCREMENTO DAS TENSOES DEVIDO	PRINC111
C ==	AO CALCULO ITERATIVO	PRINC112
785	CALL INCRE1(LIST,CORD,NE,NNO,NGL,DESL,ERRO,RC,RT,EUC,EUT,FORCE,DEF	PRINC113
	*,Q,ORT,E,IT,KK,ESP,IMAT,IET,NCC,MNR,NTC,IR)	PRINC114
	GO TO 200	PRINC115
<del>C ==</del>	<del>IMPRESSAO DAS TENSOES, DEFORMACOES E DESLOCAMENTOS</del>	<del>PRINC116</del>
500	WRITE(LW,950) IT	PRINC117
950	FORMAT(818,5X,8 NUMERO DE IERACOES EFETUADAS =8,13)	PRINC118
	WRITE(LW,760) KK	PRINC126
760	FORMAT(/8X,8 DESLOCAMENTOS DO INCREMENTO NUM 8,12,/,8 PTO NODAL8,	PRINC127
	*5X,8 DESL X8,6X,8 DESL Y8)	PRINC128
	DO 830 INE=1,NEQ,2	PRINC129
	I=(INE+1)/2	PRINC130
830	WRITE(LW,840) I,DESL(INE),DESL(INE+1)	PRINC131

840	FORMAT(I7,3X,F12,9,2X,F12,9)	PRINC132
	WRITE(LW,600)	PRINC133
600	FORMAT(/8X,8TENSOES NOS ELEMENTOS TRIANGULARES(TRIM 3)8,/,2X,8ELEPRINC134	
	*MENTO8,5X,8SIG X8,5X,8SIG Y8,4X,8TAL XY8,6X,8TP 18,6X,8TP 28,6X,	PRINC135
	*8TZ8,6X,8ANG ORT88)	PRINC136
	DO 850 N=1,NE	PRINC137
850	WRITE(LW,860) N,(FORCE(N,I),I=1,6),DEF(N,6)	PRINC138
860	FORMAT(I7,3X,7F10.3)	PRINC139
	DO 870 N=1,NE	PRINC143
870	WRITE(LW,880) N,(DEF(N,I),I=1,5)	PRINC144
880	FORMAT(I7,3X,5F12.8)	PRINC145
404	CONTINUE	PRINC146
	DO 810 N=1,NE	PRINC150
810	WRITE(LW,702)N,(ORT(N,N5),N5=1,5)	PRINC151
702	FORMAT(I7,3X,2F12.4,2X,3F12.4)	PRINC152
C ==	CALCULO DAS REACOES DE APOIO.	PRINC153
405	CALL RECAL(NNO,NGL,NCC,NE,LIST,NNR,IMAT,ORT,IET,CORD,DESL,NTC,KK,	PRINC154
	*AG,ESP,E,IT)	PRINC155
	GO TO 402	PRINC156
400	WRITE(LW,8)	PRINC157
	8 FORMAT(1H1,5X,8TERMINO DO PROCESSAMENTO8,/) )	PRINC158
	CALL EXIT	PRINC159
	END	PRINC161
	SUBROUTINE DADOS (MP,NC,TIT,NE,NCC,REC,CORD,LIST,IMAT,ORT,NNR,NTC,DADOS	1
	*NNO,AG,ESP,RC,RT,EUC,EUT)	DADOS 2
C ==	SUBROTINA PARA LEITURA DOS DADOS DA ESTRUTURA,	DADOS 3
	IMPLICIT REAL *8(A-H,D-Z)	DADOS 4
	DIMENSION TIT(20),NNR(70),NTC(70),REC(70,2),AG(71),ESP(25)	DADOS 5
	DIMENSION CORD(200,2),LIA(200)	
	DIMENSION ORT(300,5),LIST(300,3),IMAT(300)	
	COMMON LR,LW	DADOS 8
C ==	LEITURA E IMPRESSAO DO TITULO E CONTROLES GERAIS	DADOS 9
	READ(LR,7)TIT	DADOS 10
	7 FORMAT(20A4)	DADOS 11
	WRITE(LW,100)TIT	DADOS 12
100	FORMAT(/5X,20A4)	DADOS 13

READ(LR,1)NP,NE,NCC,NC,NTM,INX	DADOS 14
1 FORMAT(6I10)	DADOS 15
WRITE(LW,901)	DADOS 16
901 FORMAT(/,8X,0NP0,8X,0NE0,7X,0NCC0,8X,0NC0,7X,0NTM0,7X,0INX0)	DADOS 17
WRITE(LW,1)NP,NE,NCC,NC,NTM,INX	DADOS 18
C === LEITURA E IMPRESSAO DAS CARACTERISTICAS DOS MATERIAIS	DADOS 19
READ(LR,101)RC,RT,EUC,EUT	DADOS 20
101 FORMAT(4F10,5)	DADOS 21
WRITE(LW,102)	DADOS 22
102 FORMAT(////,5X,0PROPRIEDADES INICIAIS DOS MATERIAIS0,/,8X,0RC0,8X,	DADOS 23
*0RT0,7X,0EUC0,7X,0EUT0)	DADOS 24
WRITE(LW,902) RC,RT,EUC,EUT	DADOS 25
902 FORMAT(5X,4F10,5)	DADOS 26
READ(LR,2) (ORT(1,1),I=1,5)	DADOS 27
2 FORMAT(5F10,0)	DADOS 28
WRITE(LW,108)	DADOS 29
108 FORMAT(8X,0E10,7X,0NI10,7X,0E20,6X,0NI20,6X,0ANG0)	DADOS 30
WRITE(LW,8) (ORT(1,I),I=1,5)	DADOS 31
8 FORMAT(F13,0,F8,2,F10,0,F8,2,F10,0)	DADOS 32
READ(LR,105)(I,ESP(I),L=1,NTM)	DADOS 33
105 FORMAT(I10,F10,0)	DADOS 34
WRITE(LW,115)	DADOS 35
115 FORMAT(8X,0TIPO DE ESPESSURA0)	DADOS 36
WRITE(LW,116)(I,ESP(I),I=1,NTM)	DADOS 37
116 FORMAT(I10,F10,3)	DADOS 38
DO 130 I=1,NTM	DADOS 39
IF(ESP(I) =0.00001)131,131,130	DADOS 40
131 ESP(I)=1,	DADOS 41
130 CONTINUE	DADOS 42
ORT(1,5)=ORT(1,5)*0.017453292	DADOS 43
C === GERACAO AUTOMATICA DOS NOS	DADOS 44
WRITE(LW,6)	DADOS 45
6 FORMAT(010,8X,0COORDENADAS DOS NOS0,/,3X,0NO0,8X,0X0,8X,0Y0,1X,/)DADOS 46	
IA=1	DADOS 47
IF(INX) 9403,9404,9403	DADOS 48
9403 I=IA	DADOS 49

	READ(LR,11) LIA(I),CORD(I,1),CORD(I,2)	DADOS 50
9400	I=I+1	DADOS 51
	IF(I=NP) 9405,9405,9406	DADOS 52
9405	READ(LR,11) LIA(I),CORD(I,1),CORD(I,2)	DADOS 53
	IF(LIA(I)=LIA(I-1)-1) 9401,9400,9401	DADOS 54
9401	I1=LIA(I-1)+1	DADOS 55
	I2=LIA(I)-1	DADOS 56
	I3=LIA(I)	DADOS 57
	LIA(I3)=LIA(I)	DADOS 58
	CORD(I3,1)=CORD(I,1)	DADOS 59
	CORD(I3,2)=CORD(I,2)	DADOS 60
	NPONT=I3-I1+1	DADOS 61
	DELTX=CORD(I,1)-CORD(I-1,1)	DADOS 62
	DELTU=CORD(I,2)-CORD(I-1,2)	DADOS 63
	ACRSX=DELTX/NPONT	DADOS 64
	ACRSY=DELTU/NPONT	DADOS 65
	DQ 9402 J=I1,I2	DADOS 66
	LIA(J)=LIA(J-1)+1	DADOS 67
	CORD(J,1)=CORD(J-1,1)+ACRSX	DADOS 68
9402	CORD(J,2)=CORD(J-1,2)+ACRSY	DADOS 69
	I=I3	DADOS 70
	GO TO 9400	DADOS 71
9404	READ(LR,11) (LIA(J),CORD(J,1),CORD(J,2),J=IA,NP)	DADOS 72
11	FORMAT(3(I5,2F10,4))	DADOS 73
9406	IF(NP=LIA(NP)) 103,104,103	DADOS 74
103	WRITE(LW,12)	DADOS 75
12	FORMAT(/10X,8LEITURA ERRADA DOS DADOS = PAR8)	DADOS 76
	CALL EXIT	DADOS 77
104	WRITE(LW,9) (LIA(J),CORD(J,1),CORD(J,2),J=IA,NP)	DADOS 78
9	FORMAT(I5,F10,3,F9,3)	DADOS 79
C ==	GERACAO AUTOMATICA DAS INCIDENCIAS	DADOS 80
	WRITE(LW,155)	DADOS 81
155	FORMAT(/7X,8ELEMENTO8,17X,8NUMERO DOS NOS8,14X,8PROPRIEDADE8,/) N=0	DADOS 82
	N=0	DADOS 83
160	READ(LR,165) M.(LIST(M,I),I=1,3),IMAT(M)	DADOS 84
165	FORMAT(5I10)	DADOS 85

170	N=N+1	DADOS	86
	IF(M=N) 185,185,175	DADOS	87
175	DO 180 I=1,3	DADOS	88
180	LIST(N,I)=LIST(N-1,I)+1	DADOS	89
	IMAT(N)=IMAT(N-1)	DADOS	90
185	WRITE(LW,190) N,(LIST(N,I),I=1,3),IMAT(N)	DADOS	91
190	FORMAT(9X,I3,13X,I3,9X,I3,9X,I3,13X,I2)	DADOS	92
	IF(N=M)170,195,195	DADOS	93
195	IF(N=NE) 160,200,200	DADOS	94
C ==	LEITURA DAS CONDICÕES DE CONTOURNO	DADOS	95
200	WRITE(LW,111)	DADOS	96
111	FORMAT(/,5X,8CONDICOES DE APOIO8,/,5X,8PT,NODAL8,7X,8APOIO8,6X,8RDADOS	DADOS	97
	*ECALQ,X8,6X,8PECALQ,Y8,6X,8ANGULO8,731X,8C,ELAST,8,6X,8C,ELAST,8/)	DADOS	98
	READ(LR,4)(NNR(K),NTC(K),REC(K,1),REC(K,2),AG(K),K=1,NCC)	DADOS	99
4	FORMAT(2I10,3F10,3)	DADOS	100
	AG(71)=0.	DADOS	101
	DO 120 K=1,NCC	DADOS	102
120	AG(71)=AG(71)+DABS(AG(K))	DADOS	103
	WRITE(LW,16)(NNR(K),NTC(K),REC(K,1),REC(K,2),AG(K),K=1,NCC)	DADOS	104
16	FORMAT(I10,I14,2F14,3,F13,1)	DADOS	105
	RETURN	DADOS	106
2900	WRITE(LW,7000) N		
7000	FORMAT(/,5X,8ERRO ELEM NUM=8,I3)		
	RETURN		
	END	DADOS	107
	SUBROUTINE CARRE (NEQ,KI,TIT,NGL,NP,V,NE,NNO,LIST,LF,LL,NI,ERRO,PECARRE		1
	*SO,ITMAX)	CARRE	2
C ==	SUBROTINA FORMADORA DO VETOR DE CARGAS	CARRE	3
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	CARRE	4
	DIMENSION TIT(20),PESQ(20),VA(2)	CARRE	5
	DIMENSION V(400)		
	DIMENSION LIST(300,3)		
	COMMON LR,LW	CARRE	8
C ==	ZERAMENTO DO VETOR DE CARGAS	CARRE	9
	DO 160 I=1,NEQ	CARRE	10
160	V(I)=0.	CARRE	11

3	READ(LR,3)NI,ERRO,ITMAX	CARRE 12
	FORMAT(I10,F10.0,I10)	CARRE 13
	IF(NI.EQ.0) NI=1	CARRE 14
	IF(ERRO.EQ.0.) ERRO=0.01	CARRE 15
	IF(ITMAX.EQ.0) ITMAX=100	CARRE
	WRITE(LW,100)TIT,KI,NI,ERRO,ITMAX	CARRE 16
100	FORMAT(1H1,4X,20A4,/,5X,8C80 DE CARREGAMENTO NUMERO8,15,5X,	CARRE 17
	*8N MERO DE INCREMENTOS DE CARGA=8,15,5X,8ERRO ADMITIDO =8,F10,7,7	CARRE 18
	*5X,8NUM, MAXIMO DE ITERACOES =8,15,5X,32(8-8))	CARRE 19
C ==	LEITURA E IMPRESSAO DOS PESOS DOS INCREMENTOS	CARRE 20
	IF(NI-1) 105,110,105	CARRE 21
110	PESO(1)=1.	CARRE 22
	GO TO 115	CARRE 23
105	READ(LR,10)(PESO(J),J=1,NI)	CARRE 24
10	FORMAT(8F10.0)	CARRE 25
	WRITE(LW,15)	CARRE 26
15	FORMAT(/,8X,8PESO DOS INCREMENTOS8,/,6X,8INCREM8,3X,8PESOS8)	CARRE 27
	DO 20 J=1,NI	CARRE 28
20	WRITE(LW,30) J,PESO(J)	CARRE 29
30	FORMAT(I10,F10.4)	CARRE 30
C ==	LEITURA,IMPRESSAO E ARMAZENAMENTO DO VETOR DE CARGAS	CARRE 31
115	WRITE(LW,200)	CARRE 32
200	FORMAT(/5X,8PT NODAL8,3X,8CARGA X8,4X,8CARGA Y8,/) )	CARRE 33
111	READ(LR,9)NA,(VA(K),K=1,NGL)	CARRE 34
9	FORMAT(I10,2F10.2)	CARRE 35
	IF(NA)130,130,120	CARRE 36
120	WRITE(LW,6)NA,(VA(K),K=1,NGL)	CARRE 37
6	FORMAT(I10,F13.2,F11.2)	CARRE 38
	DO 170 K=1,NGL	CARRE 39
	IA=(NA-1)*NGL+K	CARRE 40
170	V(IA)=V(IA)+VA(K)	CARRE 41
	GO TO 111	CARRE 42
130	IF(KI-1)180,180,194	CARRE 43
C ==	CALCULO DA LARGURA DE FAIXA	CARRE 44
180	LF=0	CARRE 45
	DO 192 N=1,NE	CARRE 46

DO 192 J2=2,NNO	CARRE 47
DO 192 J1=2,NNO	CARRE 48
DIF=LIST(N,J1)-LIST(N,J2-1)	CARRE 49
LFF=(DABS(DIF)+1)*NGL	CARRE 50
IF(LFF-LF)192,192,193	CARRE 51
193 LF=LFF	CARRE 52
192 CONTINUE	CARRE 53
LL=900/LF/NGL*NGL	
C === VERIFICACAO DA LARGURA DE FAIXA NAO PODE ULTRAPASSAR 30	
IF(LF-30) 194,194,195	
195 WRITE(LW,196)LF	CARRE 57
196 FORMAT(/,6 LARGURA DE FAIXA MAIOR DO QUE O COMPRIMENTO DO BLOCO,	CARRE 58
*LF=6,I3)	CARRE 59
CALL EXIT	CARRE 60
194 RETURN	CARRE 61
END	CARRE 62
SUBROUTINE FORMB(NEQ,NE,LIST,IMAT,CORD,ORT,NNO,NGL,NCC,NNR,NTC,	FORMB 1
*V,REC,LF,LL,IC,IET,KK,AG,IT,ESP,E,IO)	
C === SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA EM BLOCOS,ARFORMB	3
C === MAZENANDO-OS FM VETOR,	FORMB 4
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	FORMB 5
DIMENSION NNR(70),NTC(70),REC(70,2),AG(71),ESP(25),E(3,3),CRIG(6,6)	FORMB 6
*)	FORMB 7
DIMENSION V(400),CORD(200,2)	
DIMENSION ORT(300,5),LIST(300,3),IMAT(300)	
DIMENSION RE(900)	
COMMON LR,LW	FORMB 11
NO=0	FORMB 13
IC=1	FORMB 14
C === FRAGMENTO DO PRIMEIRO BLOCO	FORMB 17
160 IF(NEQ-LL)200,201,201	FORMB 18
201 IIA=LL*LF	FORMB 19
GO TO 202	FORMB 20
200 I1=NEQ*LF	FORMB 21
202 DO 203 NL=1,IIA	FORMB 22
203 RE(NL)=0.	FORMB 23



C ===	INICIO DA MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ POR BLOCOS	FORMB 24
C ===	VERIFICACAO DOS ELEMENTOS QUE CONTRIBUEM EM CADA BLOCO	FORMB 25
204	DO 210 N=1,NE	FORMB 26
	DO 207 J1=1,NNO	FORMB 27
	NL=(LIST(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*LL	FORMB 28
	IF(NL)207,208,208	FORMB 29
208	IF(NL=LL)209,207,207	FORMB 30
207	CONTINUE	FORMB 31
	GO TO 210	FORMB 32
C ===	MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO QUE CONTRIBUI P/ O BLOCO	FORMB 33
209	IF(IT+KK.EQ.1.AND.V.NE.1) GO TO 10	
	CALL ELAST(ORT(N,1),ORT(N,2),ORT(N,3),ORT(N,4),ORT(N,5),IET,E)	
10	IMA=IMAT(N)	FORMB 41
	ESPE=ESP(IMA)	FORMB 42
C ===	CHAMADA DA SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO N,	FORMB 43
	CALL RIGID(N,LIST,CORD,E,CRIG,ESPE,AG,NNO,NCC,NNR,NGL,NO)	FORMB 44
	DO 210 J1=1,NNO	FORMB 45
	NL=(LIST(N,J1)-1)*NGL-(IC-1)*LL	FORMB 46
	IF(NL)210,212,212	FORMB 47
212	IF(NL=LL)213,210,210	FORMB 48
213	DO 210 J=1,NGL	FORMB 49
	NL=NL+1	FORMB 50
	I=(J1-1)*NGL+J	FORMB 51
	DO 210 K1=1,NNO	FORMB 52
	NC=(LIST(N,K1)-1)*NGL-(IC-1)*LL	FORMB 53
	DO 210 K=1,NGL	FORMB 54
	NCO=NC+K+1-NL	FORMB 55
	L=(K1-1)*NGL+K	FORMB 56
	IF(NCO)210,210,214	FORMB 57
214	IA=(NL-1)*LF+NCO	FORMB 58
	RE(IA)=RE(IA)+CRIG(I,L)	FORMB 59
210	CONTINUE	FORMB 60
C ===	MODIFICACAO DA MATRIZ DEVIDO AS CONDICAOES DE CONTORNO	FORMB 61
181	DO 220 N=1,NCC	FORMB 62
	NX=10** (NGL-1)	FORMB 63
	I=NNR(N)	FORMB 64

NL=(I-1)*NGL-(IC-1)*LL	FORMB 65
IF(NL)220,222,222	FORMB 66
222 IF(NL-(LL+LF-1))223,220,220	FORMB 67
223 NTCA=NTC(N)	FORMB 68
DO 220 M=1,NGL	FORMB 69
NL=NL+1	FORMB 70
IA=(NL-1)*LF+1	FORMB 71
IDA=NTCA/NX	FORMB 72
IF(IDA)224,224,225	FORMB 73
225 JJ=NL+(IC-1)*LL	FORMB 74
C == TESTE DE VERIFICACAO DA TECNICA A SER ADOOTADA.	FORMB 75
IF(DABS(REC(N,M))-0.000001) 221,221,286	FORMB 76
C == TECNICA DO NUMERO GRANDE .	FORMB 77
286 IF(IA-IIA)310,310,269	FORMB 78
310 V(JJ)=10.E+20*REC(N,M)	FORMB 79
RE(IA)=10.E+20	
GO TO 269	FORMB 83
C == TECNICA DA INTRODUCAO DE UM E ZEROS.	FORMB 84
221 IF(NL-LL)226,226,227	FORMB 85
227 NDIF=NL-LL+1	FORMB 86
IF(NDIF-LF)228,228,269	FORMB 87
226 NDIF=2	FORMB 88
RE(IA)=1.	
V(JJ)= REC(N,M)	
228 DO 229 J=NDIF,LF	FORMB 93
IF(NL-LL) 230,230,231	FORMB 94
230 JJ=NL+(IC-1)*LL+J-1	FORMB 95
IF(JJ=NEQ)301,301,231	FORMB 96
301 IA=(NL-1)*LF+J	FORMB 97
V(JJ)=V(JJ)-RE(IA)*REC(N,M)	FORMB 98
RE(IA)=0.	
231 NR=NL+1-J	FORMB102
IF(NR)229,229,232	FORMB103
232 JJ=NR+(IC-1)*LL	FORMB104
IA=(NR-1)*LF+J	FORMB105
V(JJ)=V(JJ)-RE(IA)*REC(N,M)	FORMB106

RE(IA)=0.	
229 CONTINUE	FORMB110
269 NTCA=NTCA-NX*IDA	FORMB111
GO TO 251	FORMB112
C === INTRODUCAO DO APOIO ELASTICO,	FORMB113
224 IF(NL-LL) 305,305,251	FORMB114
305 RE(IA)=RE(IA)+REC(N,M)	
251 NX=NX/10	FORMB118
220 CONTINUE	FORMB119
LLI=NEQ-IC*LL	FORMB120
IF(LLI)234,234,235	FORMB121
234 LLI=NEQ-(IC-1)*LL	FORMB122
NO=1	FORMB123
GO TO 236	FORMB124
235 LLI=LL	FORMB125
C === CHAMADA DA SUBROTINA DECOMPOSITORA DA MATRIZ RE,	FORMB128
236 CALL DEBLO(N0,IC,LF,LLI,LL,RE,ID)	
IF(N0)237,237,238	
237 IC=IC+1	FORMB131
GO TO 204	
238 RETURN	FORMB134
END	FORMB135
SUBROUTINE ELAST(E1,P1,E2,P2,B,IET,E)	ELAST 1
C === SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE ELASTICIDADE	ELAST 2
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	ELAST 3
DIMENSION E(3,3),T(3,3),F(3,3)	ELAST 4
COMMON LR,LW	ELAST 5
E(1,3)=0.	ELAST 6
E(2,3)=0.	ELAST 7
E(3,1)=0.	ELAST 8
E(3,2)=0.	ELAST 9
IF(P2=0.09) 20,20,21	
20 GO TO (30,31),IET	ELAST 11
C === ESTADO PLANO DE TENSÕES P/ O MATERIAL ISOTROPO,	ELAST 12
30 AUX=E1/(1.-P1**2)	ELAST 13
E(1,1)=AUX	ELAST 14

E(1,2)=AUX*P1	ELAST 15
E(2,1)=E(1,2)	ELAST 16
E(2,2)=AUX	ELAST 17
E(3,3)=AUX*(1,-P1)/2,	ELAST 18
RETURN	ELAST 19
C === ESTADO PLANO DE DEFORMACOES P/ O MATERIAL ISOTROPO.	ELAST 20
31 AUX=E1*(1,-P1)/((1,+P1)*(1,-2,*P1))	ELAST 21
E(1,1)=AUX	ELAST 22
E(1,2)=AUX*P1/(1,-P1)	ELAST 23
E(2,1)=E(1,2)	ELAST 24
E(2,2)=AUX	ELAST 25
E(3,3)=AUX*(1,-2,*P1)/(2,*(1,-P1))	ELAST 26
RETURN	ELAST 27
C === MATRIZ DE TRANSFORMACAO P/ MATERIAIS ORTOTROPOS	ELAST 28
21 T(1,1)=DCOS(B)**2	ELAST 29
T(1,2)=DSIN(B)**2	ELAST 30
T(1,3)=-2.*DSIN(B)*DCOS(B)	ELAST 31
T(2,1)=T(1,2)	ELAST 32
T(2,2)=T(1,1)	ELAST 33
T(2,3)=-T(1,3)	ELAST 34
T(3,1)=T(2,3)/2.	ELAST 35
T(3,2)=-T(3,1)	ELAST 36
T(3,3)=T(1,1)-T(1,2)	ELAST 37
E12=DSQRT(E1*F2)	ELAST 38
P12=DSQRT(P1*P2)	ELAST 39
AN=E1/E2	ELAST 40
GO TO (22,23),IET	ELAST 41
C === ESTADO PLANO DE TENSOES P/ O MATERIAL ORTOTROPO	ELAST 42
22 AUX=E2/(1,-P12**2)	ELAST 43
E(1,1)=AUX*AN	ELAST 44
E(1,2)=P12*DSQRT(AN)*AUX	ELAST 45
E(2,2)=AUX	ELAST 46
E(3,3)=(1,-P12)*DSQRT(AN)/2,*AUX	ELAST 47
GO TO 24	ELAST 48
C === ESTADO PLANO DE DEFORMACOES P/ MATERIAL ORTOTROPO	ELAST 49
23 P3=0,2	ELAST 50

AUX=E2/(1,-P1*P2-P1*P3-P2*P3-2,*P1*P2*P3)	ELAST 51
E(1,1)=AUX*AN*(1,-P3*P2)	ELAST 52
E(1,2)=AUX*P1*(1,+P3)	ELAST 53
E(2,2)=AUX*(1,-P3*P1)	ELAST 54
E(3,3)=E12/(2.*(1,+P12))	ELAST 55
24 E(2,1)=E(1,2)	ELAST 56
C === TRANSFORMACAO DE COORDENADAS.	ELAST 57
DO 25 I=1,3	ELAST 58
DO 25 J=1,3	ELAST 59
F(I,J)=0.	ELAST 60
DO 25 K=1,3	ELAST 61
25 F(I,J)=F(I,J)+E(I,K)*T(J,K)	ELAST 62
DO 27 I=1,3	ELAST 63
DO 27 J=1,3	ELAST 64
E(I,J)=0.	ELAST 65
DO 27 K=1,3	ELAST 66
27 E(I,J)=E(I,J)+T(I,K)*F(K,J)	ELAST 67
RETURN	ELAST 68
END	ELAST 69
SUBROUTINE RIGID(N,LIST,CORD,E,CRIG,ESP,AG,NNO,NCC,NNR,NGL,NO)	RIGID 1
C === SUBROTINA FORMADORA DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO TRIM3.	RIGID 2
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	RIGID 3
DIMENSION NNR(70),AG(71),E(3,3),CRIG(6,6),B(3,6),D(3,6)	RIGID 4
DIMENSION CORD(200,2)	
DIMENSION LIST(300,3)	
COMMON LR,LW	
C === LISTA DE INCIDENCIA DE CADA ELEMENTO.	RIGID 7
I=LIST(N,1)	RIGID 8
J=LIST(N,2)	RIGID 9
K=LIST(N,3)	RIGID 10
C === COORDENADAS LOCAIS	RIGID 11
AJ=CORD(J,1)-CORD(I,1)	RIGID 12
AK=CORD(K,1)-CORD(I,1)	RIGID 13
BJ=CORD(J,2)-CORD(I,2)	RIGID 14
BK=CORD(K,2)-CORD(I,2)	RIGID 15
AREA=(AJ*BK-AK*BJ)/2.	RIGID 16
	RIGID 17

IF (AREA) 220, 220, 221	RIGID 18
C === MENSAGEM DE ERRO REFERENTE A LISTA DE INCIDENCIA	RIGID 19
220 WRITE (LW, 100) N	RIGID 20
100 FORMAT (///, 5X, 3AREA NEGATIVA PARA O ELEMENTO NUMERO 3, I4)	RIGID 21
CALL EXIT	RIGID 22
C === FORMACAO DA MATRIZ QUE RELACIONA DEFORMACAO COM DESLOCAMENTO	RIGID 23
C === OS COEFICIENTES ESTAO MULTIPLICADOS POR 2*AREA	RIGID 24
221 B(1,1)=BJ-BK	RIGID 25
B(1,2)=0.	RIGID 26
B(1,3)=BK	RIGID 27
B(1,4)=0.	RIGID 28
B(1,5)=-BJ	RIGID 29
B(1,6)=0.	RIGID 30
B(2,1)=0.	RIGID 31
B(2,2)=AK-AJ	RIGID 32
B(2,3)=0.	RIGID 33
B(2,4)=-AK	RIGID 34
B(2,5)=0.	RIGID 35
B(2,6)=AJ	RIGID 36
B(3,1)=B(2,2)	RIGID 37
B(3,2)=B(1,1)	RIGID 38
B(3,3)=-AK	RIGID 39
B(3,4)=BK	RIGID 40
B(3,5)=AJ	RIGID 41
B(3,6)=-BJ	RIGID 42
C === FORMACAO DA MATRIZ QUE RELACIONA AS TENSOES COM OS DESLOCAMENTOS.	RIGID 43
DO 205 I=1,3	RIGID 44
DO 205 J=1,6	RIGID 45
D(I,J)=0.	RIGID 46
DO 205 K=1,3	RIGID 47
205 D(I,J)=D(I,J)+E(I,K)/(2.*AREA)*B(K,J)	RIGID 48
C === FORMACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	RIGID 49
DO 240 I=1,6	RIGID 50
DO 240 J=1,6	RIGID 51
CRIG(I,J)=0.	RIGID 52
DO 240 K=1,3	RIGID 53

240	CRIG(I,J)=CRIG(I,J)+D(K,I)/2.*8(K,J) *ESP	RIGID	54
C ==	CONSIDERACAO DE APOIO INCLINADO.	RIGID	55
	IF(AG(71)-0.000001)300,300,301	RIGID	56
301	DO 302 I=1,NCC	RIGID	57
	IF(DABS(AG(I))-0.000001)302,302,306	RIGID	58
306	DO 302 J=1,NNO	RIGID	59
	IF(CLST(N,J)-NNR(I))302,304,302	RIGID	60
304	CALL INCLI(CRIG,AG(I),J,NGL,D)	RIGID	61
302	CONTINUE	RIGID	62
300	RETURN	RIGID	63
	END	RIGID	64
	SUBROUTINE INCLI(C,AG,J,NGL,D)	INCLI	1
C ==	SUBROTINA PARA ROTACAO DO SISTEMA DE REFERENCIA D6 P6V36 N6D 8=6	INCLI	2
C ==	ELEMENTO CORRESPONDENTE A UM APOIO INCLINADO.	INCLI	3
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	INCLI	4
	DIMENSION C(6,6),D(3,6)	INCLI	5
	COMMON LR,LW	INCLI	6
	CS=DCOS(AG*0.017453292)	INCLI	7
	SS=DSIN(AG*0.017453292)	INCLI	8
	I1=(J-1)*NGL+1	INCLI	9
	DO 15 J1=1,5,2	INCLI	10
	A=CS*C(I1,J1+1)+SS*C(I1+1,J1+1)	INCLI	11
	B=-SS*C(I1,J1)+CS*C(I1+1,J1)	INCLI	12
	C(I1,J1)=CS*C(I1,J1)+SS*C(I1+1,J1)	INCLI	13
	C(I1+1,J1+1)=-SS*C(I1,J1+1)+CS*C(I1+1,J1+1)	INCLI	14
	C(I1,J1+1)=A	INCLI	15
15	C(I1+1,J1)=B	INCLI	16
	DO 16 J1=1,5,2	INCLI	17
	A=-SS*C(J1,I1)+CS*C(J1,I1+1)	INCLI	18
	B=CS*C(J1+1,I1)+SS*C(J1+1,I1+1)	INCLI	19
	C(J1,I1)=CS*C(J1,I1)+SS*C(J1+1,I1+1)	INCLI	20
	C(J1+1,I1+1)=-SS*C(J1+1,I1)+CS*C(J1+1,I1+1)	INCLI	21
	C(J1,I1+1)=A	INCLI	22
16	C(J1+1,I1)=B	INCLI	23
C ==	MODIFICACAO DA MATRIZ QUE RELACIONA TENSOES COM OS DESLOCAMENTOS.	INCLI	24
	DO 17 J1=1,3	INCLI	25

A=D(J1,I1)	INCLI 26
D(J1,I1)=D(J1,I1)*CS+D(J1,I1+1)*SS	INCLI 27
17 D(J1,I1+1)=-A*SS+D(J1,I1+1)*CS	INCLI 28
RETURN	INCLI 29
END	INCLI 30
SUBROUTINE DEBLO(NO,IC,LF,LLI,LL,RE,ID)	DEBLO 1
C === SUBROTINA DECOMPOSITORA DA MATRIZ RE EM UMA MATRIZ FAIXA TRIANGU-	DEBLO 2
C === LAR SUPERIOR, QUE MULTIPLICADA PELA SUA TRANSPOSTA FORNECE A PRI-	DEBLO 3
C === MEIRA. A DECOMPOSICAO PODE SER EFETUADA EM BLOCOS.	DEBLO 4
C SE NO DIFERE DE 1, EXISTEM OUTRAS PARTICOES A SEREM EFETUADAS.	DEBLO 5
C IC = INDICE CONTADOR QUE INDICA O NUMERO DA PARTICAO	DEBLO 6
C LF = LARGURA DE FAIXA DO PROBLEMA.	DEBLO 7
C LLI = NUMERO DE EQUACOES DA PARTICAO IC.	DEBLO 8
C LL = NUMERO MAXIMO DE EQUACOES POR PARTICAO.	DEBLO 9
C RE = PARTICAO A SER TRIANGULARIZADA.	DEBLO 10
IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	DEBLO 11
DIMENSION RE(900)	
COMMON LR,LW	DEBLO 13
C === TRIANGULARIZACAO DO BLOCO DE INDICE CONTADOR IC.	DEBLO 14
ID=LL*LF/320*(IC-1)+IC	DEBLO 15
DO 21 I=1,LLI	DEBLO 16
IA=(I-1)*LF+1	DEBLO 17
DO 21 J=1,LF	DEBLO 18
IE=IA-1+J	DEBLO 19
IQ=LF-J	DEBLO 20
IF(I-1+IQ)5,6,6	DEBLO 21
5 IQ=I-1	DEBLO 22
6 SOMA=0.	DEBLO 23
IF(IQ-1)12,8,8	DEBLO 24
8 DO 11 K=1,IQ	DEBLO 25
IB=(I-K-1)*LF+K+1	DEBLO 26
JA=J+K+(I-K-1)*LF	DEBLO 27
11 SOMA=SOMA+RE(IB)*RE(JA)	DEBLO 28
12 IF(J-1)20,13,20	DEBLO 29
13 SOMA=RE(IA)-SOMA	DEBLO 30
IF(SOMA)15,15,18	DEBLO 31



C ==	MENSAGEM DE ERRO,	DEBLO 32
15	WRITE(LW,16)I,J,SOMA,IC,LF,LL,LLI	DEBLO 33
16	FORMAT(/,5X,8SUBROTINA NAO ADEQUADA PARA A RESOLUCAO DO SISTEMA	DEBLO 34
*	PARE I=0,I3,0 J=0,I3,0 SOMA=0,F10,4,/,5X,0 IC=0,I3,0	DEBLO 35
*	LF=0,I3,0 LL=0,I3,0 LLI=0,I3)	DEBLO 36
	CALL EXIT	DEBLO 37
18	RE(IA)=DSQRT(SOMA)	DEBLO 38
	GO TO 21	DEBLO 39
20	RE(IE)=(RE(IE)-SOMA)/RE(IA)	DEBLO 40
21	CONTINUE	DEBLO 41
	NL=LLI*LF	DEBLO 42
	WRITE(120ID)(RE(I),I=1,NL)	DEBLO 43
	IF(NO-IC)23,44,23	DEBLO 44
C ==	FORMACAO DO RESIDUO PARA O BLOCO SEGUINTE,	DEBLO 45
23	IF(NO-1)46,44,46	DEBLO 46
46	DO 36 I=1,LLI	DEBLO 47
	DO 36 J=1,LF	DEBLO 48
	IE=(I-1)*LF+J	DEBLO 49
	IF(I-LF+1)28,28,38	DEBLO 50
28	IF(J-LF+1)29,29,38	DEBLO 51
29	IQ=LLI+J+I-LF	DEBLO 52
	SOMA=0,	DEBLO 53
	DO 34 K=IQ,LLI	DEBLO 54
	IA=LLI+I-K+1+(K-1)*LF	DEBLO 55
	JA=LLI+J+I-K+(K-1)*LF	DEBLO 56
34	SOMA=SOMA+RE(IA)*RE(JA)	DEBLO 57
	RE(IE)=-SOMA	DEBLO 58
	GO TO 36	DEBLO 59
38	RE(IE)=0,	DEBLO 60
36	CONTINUE	DEBLO 61
44	RETURN	DEBLO 62
	END	DEBLO 63
	SUBROUTINE REBLO(ICS,LF,LL,NEQ,V,ID)	REBLO 1
C ==	SUBROTINA RESOLVEDORA DO SISTEMA DE EQUACOES A PARTIR DA MATRIZ	REBLO 2
C ==	FAIXA TRIANGULAR SUPERIOR OBTIDA POR DEBLO E ARMAZENADA EM VETORES	REBLO 3
C	ICS = NUMERO TOTAL DE PARTICOES.	REBLO 4

C	NEQ = NUMERO TOTAL DE EQUACOES DO SISTEMA.	REBLO 5
C	V = VETOR DO CARREGAMENTO QUE SE TRANSFORMA NOS DESLOCAMENTOS,	REBLO 6
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	REBLO 7
	DIMENSION V(400)	
	DIMENSION RE(900)	
	COMMON LR,LW	REBLO 10
	DO 34 IC=1,ICS	REBLO 11
	IF(IC-ICS)8,5,5	REBLO 12
5	LLI=NEQ-(IC-1)*LL	REBLO 13
	GO TO 9	REBLO 14
8	LLI=LL	REBLO 15
9	ID=LL*LF/320*(IC-1)+IC	REBLO 16
	IA=LLI*LF	REBLO 17
	READ(120ID)(RE(I),I=1,IA)	REBLO 18
11	DO 23 I=1,LLI	REBLO 19
	IA=(I-1)*LF+1	REBLO 20
	J=I-LF+1	REBLO 21
	IF(I+1-LF)14,14,15	REBLO 22
14	J=1	REBLO 23
15	SOMA=0,	REBLO 24
	I1=I-1	REBLO 25
	IF(J-I1)18,18,22	REBLO 26
18	DO 21 K=J,I1	REBLO 27
	KA=I-K+1+(K-1)*LF	REBLO 28
	KB=K+(IC-1)*LL	REBLO 29
21	SOMA=SOMA+RE(KA)*V(KB)	REBLO 30
22	I2=I+(IC-1)*LL	REBLO 31
23	V(I2)=(V(I2)-SOMA)/RE(IA)	REBLO 32
	LS=LF-1	REBLO 33
	DO 33 I=1,LS	REBLO 34
	I2=IC*LL+I	REBLO 35
	K1=LL+I-LF+1	REBLO 36
	DO 33 K=K1,LL	REBLO 37
	KA=LL+I-K+1+(K-1)*LF	REBLO 38
	KB=K+(IC-1)*LL	REBLO 39
	IF(I2-NEQ)33,33,34	REBLO 40

33	V(I2)=V(I2)-RE(KA)*V(KB)	REBLO 41
34	CONTINUE	REBLO 42
C ==	CALCULO DOS DESLOCAMENTOS V DA ESTRUTURA	REBLO 43
	DO 60 I2=1, ICS	REBLO 44
	IC=ICS-I2+1	REBLO 45
	IF(ICS-IC)38,38,41	REBLO 46
38	LLI=NEQ-(IC-1)*LL	REBLO 47
	GO TO 44	
41	LLI=LL	REBLO 49
44	ID=LL*LF/320*(IC-1)+IC	
	IA=LLI*LF	REBLO 51
	READ(120ID)(RE(I),I=1,IA)	REBLO 52
	DO 59 IA=1,LLI	
	I=LLI-IA+1	REBLO 56
	I3=(I-1)*LF+1	REBLO 57
	J=I+LF-1	REBLO 58
	KAA=I+(IC-1)*LL	REBLO 59
	SOMA=V(KAA)	REBLO 60
	I1=I+1	REBLO 61
	IF(I1-J)55,55,59	REBLO 62
55	DO 58 K=I1,J	REBLO 63
	KB=K+(IC-1)*LL	REBLO 64
	IF(KB-NEQ)68,68,59	REBLO 65
68	KA=K-I+1+(I-1)*LF	REBLO 66
58	SOMA=SOMA-RE(KA)*V(KB)	REBLO 67
59	V(KAA)=SOMA/RE(I3)	REBLO 68
60	CONTINUE	REBLO 69
	RETURN	REBLO 70
	END	REBLO 71
	SUBROUTINE INCRE1 (LIST,CORD,NE,NNO,NGL,V,ERRO,RC,RT,EUC,EUT,FORCEINCRE	1
	*,DEF,FE,ORT,E,IT,KK,ESP,IMAT,IET,NCC,NNR,NTC,IR)	INCRE 2
C		INCRE 3
C ==	SUBROTINA PARA A FORMACAO DAS FORCAS EQUIVALENTES DEVIDO AO INCRE	INCRE 4
C ==	MENTO DAS TENSORES	INCRE 5
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	INCRE 6
	DIMENSION NNR(70),NTC(70),ESP(25),E(3,3),B(3,6),D(3,6),FD(6),R(6),INCRE	7

*DIF(2),RD(3),DIFR(2)	INCRE 8
DIMENSION V(400),CORD(200,2),FE(400)	
DIMENSION Opt(300,5),LIST(300,3),IMAT(300),FORCE(300,6),DEF(300,6)	
*,IR(300)	
COMMON LR,LA	INCRE 12
IFC=0	INCRE 13
IF(IT,EQ,1) GO TO 8	INCRE 14
DO 5 N=1,NE	INCRE 15
IF(IR(N),EQ,1) GO TO 8	
5 CONTINUE	INCRE 17
GO TO 9	INCRE 18
8 IFC=1	INCRE 19
9 DO 1000 N=1,NE	INCRE 20
C === LISTA DE INCIDENCIA DE CADA ELEMENTO.	INCRE 21
I=LIST(N,1)	INCRE 22
J=LIST(N,2)	INCRE 23
K=LIST(N,3)	INCRE 24
C === COORDENADAS LOCAIS	INCRE 25
AJ=CORD(J,1)-CORD(I,1)	INCRE 26
AK=CORD(K,1)-CORD(I,1)	INCRE 27
BJ=CORD(J,2)-CORD(I,2)	INCRE 28
BK=CORD(K,2)-CORD(I,2)	INCRE 29
AREA=(AJ*BK-AK*BJ)/2.	INCRE 30
C === FORMACAO DA MATRIZ QUE RELACIONA DEFORMACAO COM OSSLOCAMENTO	INCRE 31
C === OS COEFICIENTES ESTAO MULTIPLICADOS POR 2*AREA	INCRE 32
B(1,1)=BJ-BK	INCRE 33
B(1,2)=0.	INCRE 34
B(1,3)=BK	INCRE 35
B(1,4)=0.	INCRE 36
B(1,5)=-BJ	INCRE 37
B(1,6)=0.	INCRE 38
B(2,1)=0.	INCRE 39
B(2,2)=AK-AJ	INCRE 40
B(2,3)=0.	INCRE 41
B(2,4)=-AK	INCRE 42
B(2,5)=0.	INCRE 43

B(2,6)=AJ	INCRE 44
B(3,1)=B(2,2)	INCRE 45
B(3,2)=B(1,1)	INCRE 46
B(3,3)=-AK	INCRE 47
B(3,4)=BK	INCRE 48
B(3,5)=AJ	INCRE 49
B(3,6)=-BJ	INCRE 50
C === FORMACAO DA MATRIZ QUE RELACIONA AS TENSOES COM OS DESLOCAMENTOS,	INCRE 51
IF(KK+IT-2) 10,10,20	INCRE 52
20 CALL ELAST(ORT(N,1),ORT(N,2),ORT(N,3),ORT(N,4),ORT(N,5),IET,E)	INCRE 53
10 DO 205 I=1,3	INCRE 54
DO 205 J=1,6	INCRE 55
D(I,J)=0.	INCRE 56
DO 205 K=1,3	INCRE 57
205 D(I,J)=D(I,J)+E(I,K)/(2.*AREA)*B(K,J)	INCRE 58
C === FORMACAO DO VETOR DESLOCAMENTO POR ELEMENTO NA NUMERACAO LOCAL	INCRE 59
DO 300 I=1,NNO	INCRE 60
M=(LIST(N,I)-1)*NGL	INCRE 61
K=(I-1)*NGL	INCRE 62
DO 300 J=1,NGL	INCRE 63
IJ=K+J	INCRE 64
J2=M+J	INCRE 65
300 R(IJ)=V(J2)	INCRE 66
C === CALCULO DAS TENSOES E DEFORMACOES POR ELEMENTO	INCRE 67
IA=NGL*NNO	INCRE 68
IF(IR(N).EQ.1) GO TO 325	INCRE 69
IF(IFC.EQ.0) GO TO 325	INCRE 70
DO 320 I=1,3	INCRE 71
FORCE(N,I)=0.	INCRE 72
DO 320 J=1,IA	INCRE 73
320 FORCE(N,I)=FORCE(N,I)+D(I,J)*R(J)	INCRE 74
E1=(FORCE(N,1)+FORCE(N,2))/2.	INCRE 75
F=DSQRT(((FORCE(N,1)-FORCE(N,2))/2.)*2+FORCE(N,3)*2)	INCRE 76
FORCE(N,4)=E1+F	INCRE 77
FORCE(N,5)=E1-F	INCRE 78
SIGN=FORCE(N,3)*(FORCE(N,4)-FORCE(N,2))	INCRE 79

	IF(DABS(FORCE(N,3))-1,D=01) 350,350,360	
350	IF(DABS(FORCE(N,1)-FORCE(N,2))-1,D=01) 380,380,375	
375	IF(FORCE(N,1)-FORCE(N,2)) 390,380,380	INCRE 82
380	DEF(N,6)=0.	INCRE 83
	GO TO 325	INCRE 84
390	DEF(N,6)=90.*SIGN	INCRE 85
	GO TO 325	INCRE 86
360	IF(DABS(FORCE(N,4)-FORCE(N,2))-1,D=01) 390,390,395	
395	DEF(N,6)=DATAN(FORCE(N,3)/(FORCE(N,4)-FORCE(N,2)))*57,29577951	INCRE 88
325	DO 310 I=1,3	INCRE 89
	DEF(N,I)=0.	INCRE 90
	DO 310 J=1,IA	INCRE 91
310	DEF(N,I)=DEF(N,I)+B(I,J)*R(J)/(2.*AREA)	INCRE 92
	S=(DEF(N,1)+DEF(N,2))/2.	INCRE 93
	T=DSQRT(((DEF(N,1)-DEF(N,2))/2.)*2+(DEF(N,3)/2.)*2)	INCRE 94
	DEF(N,4)=S+T	INCRE 95
	DEF(N,5)=S-T	INCRE 96
C ===	CALCULO DAS TENSOES E CARACTERISTICAS FISICAS	INCRE 97
C ===	SEGUNDO UMA LEI NAO LINEAR	INCRE 98
	IF(IT.NE.85) GO TO 621	
	WRITE(LW,620)	PRINC140
620	FORMAT(/,8X,8DEFORMACOES NOS ELEMENTOS,/,2X,8ELEMENTOS,6X,8E X8,9PRINC141	
	*X,8E Y8,8X,8G XY8,9X,8E 18,9X,8E 28)	PRINC142
	WRITE(LW,880) (DEF(N,I),I=1,5)	
880	FORMAT(7X,3X,5F12.8)	
621	CALL NOLINI(DEF(N,4),DEF(N,5),DEF(N,6),RC,RT,EUC,EUT,ORT,SIG1,SIG2	INCRE 99
	*,FORCE(N,4),FORCE(N,5),N,IT,KK,IET,IR,FORCE(N,6))	INCRE 100
	IF(FORCE(N,5).EQ.0.) GO TO 600	INCRE 101
	DIF(1)=FORCE(N,4)-SIG1	INCRE 102
	DIF(2)=FORCE(N,5)-SIG2	INCRE 103
	GO TO 650	INCRE 104
600	DIF(1)=0.	INCRE 105
	DIF(2)=0.	INCRE 106
C ===	CALCULO DAS FORCAS EQUIVALENTES AO INCREMENTO DAS TENSOES	INCRE 107
C ===	A=NUMERACAO LOCAL	INCRE 108
650	TETA=DEF(N,6)*0.017453292	INCRE 109

RD(1)=DIF(1)*DCOS(TETA)**2+DIF(2)*DSIN(TETA)**2	INCRE110
RD(2)=DIF(1)*DSIN(TETA)**2+DIF(2)*DCOS(TETA)**2	INCRE111
RD(3)=0.5*DSIN(2.*TETA)*(DIF(1)-DIF(2))	INCRE112
IMA=IMAT(N)	INCRE113
DO 400 I=1,IA	INCRE114
FD(I)=0.	INCRE115
DO 400 J=1,3	INCRE116
400 FD(I)=FD(I)+B(J,I)*RD(J)*ESP(IMA)/2.	INCRE117
C == B=NUMERACAO GLOBAL	INCRE118
DO 500 I=1,NND	INCRE119
M=(LIST(N,I)-1)*NGL	INCRE120
K=(I-1)*NGL	INCRE121
DO 500 J=1,NGL	INCRE122
IJ=K+J	INCRE123
J2=M+J	INCRE124
500 FE(J2)=FD(IJ)+FE(J2)	INCRE125
IF(IT.GT.2) GO TO 1000	INCRE126
IF(ORT(N,1).GT.1000.) GO TO 1000	INCRE127
IF(ORT(N,3).LE.1000) FORCE(N,5)=SIG2	INCRE128
DS=SIG1-FORCE(N,5)	INCRE129
IF(DS.GE.0.) GO TO 450	INCRE130
FORCE(N,4)=FORCE(N,5)	INCRE131
FORCE(N,5)=SIG1	INCRE132
AUX=ORT(N,3)	INCRE133
ORT(N,3)=ORT(N,1)	INCRE134
ORT(N,1)=AUX	INCRE135
AUX=ORT(N,4)	INCRE136
ORT(N,4)=ORT(N,2)	INCRE137
ORT(N,2)=AUX	INCRE138
IF(DEF(N,6).LT.0.) GO TO 420	INCRE139
DEF(N,6)=DEF(N,6)-90.	INCRE140
GO TO 750	INCRE141
420 DEF(N,6)=DEF(N,6)+90.	INCRE142
GO TO 750	INCRE143
450 FORCE(N,4)=SIG1	INCRE144
750 ANGL=DEF(N,6)*0.017453292	INCRE145

	FORCE(N,1)=FORCE(N,4)*DCOS(ANGL)**2+FORCE(N,5)*DSIN(ANGL)**2	INCRE146
	FORCE(N,2)=FORCE(N,4)*DSIN(ANGL)**2+FORCE(N,5)*DCOS(ANGL)**2	INCRE147
	FORCE(N,3)=0,5*DSIN(2,*ANGL)*(FORCE(N,4)-FORCE(N,5))	INCRE148
	ORT(N,5)=ANGL	INCRE149
1000	CONTINUE	INCRE150
	RETURN	INCRE151
	END	INCRE152
	SUBROUTINE NOLIN1(DEF1,DEF2,TETA,RC,RT,EUC,EUT,ORT,SIG1,SIG2,T1,T2,NOLIN	1
	*,N,IT,NI,IET,IR,T3)	NOLIN 2
C ==	SUBROTINA QUE CALCULA AS TENSOES E PROPRIEDADES FISICAS SEGUNDO	NOLIN 3
C ==	UMA LEI NAO LINEAR	NOLIN 4
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)	NOLIN 5
	DIMENSION D(2),S(2),T(2)	
	DIMENSION ORT(300,5),IR(300)	
	COMMON LR,LW	NOLIN 7
835	IF(ORT(N,3)) 800,800,810	
800	ORT(N,3)=ORT(N,1)	
	ORT(N,4)=ORT(N,2)	
810	R1=RC/EUC	NOLIN 17
	R2=RT/EUT	NOLIN 18
	GO TO (105,110),IET	NOLIN 19
105	D(1)=DEF1	NOLIN 20
	D(2)=DEF2	NOLIN 21
	T3=0,	NOLIN 22
	GO TO 120	NOLIN 23
110	DELTA=ORT(N,2)/ORT(N,1)*(T1+T2)	
	D(1)=DEF1+0,2*DELTA	
	D(2)=DEF2+0,2*DELTA	
	T3=0,2*(T1+T2)	NOLIN 27
120	T(1)=T1-ORT(N,2)*T2	
	T(2)=T2-ORT(N,4)*T1	
C ==	VERIFICACAO A RUTURA SEGUNDO O CRITERIO DE MOHR-COULOMB	NOLIN 30
	IF(T2+(0,5*RC)) 5,5,20	NOLIN 31
5	IF(T1) 1101,1101,920	NOLIN 32
1101	GO TO (910,920),IET	NOLIN 33
910	IF(T2+RC)7,7,30	NOLIN 34



920	T11=T1	NOLIN 35
	IF(T3,GT,T1)T11=T3	NOLIN 36
	TL=RC-0,5*RC/RT*T11	NOLIN 37
	IF(T2+TL)7,7,30	NOLIN 38
7	*WRITE(LW,15) N,IT,NI	
15	FORMAT(/,8X,8ELEMENTO NUMERO =8,15,8ATINGIU A RUTURA POR COMPRESSANOLIN 40	
	*08,/,8X,8ITERACAO NUMERO =8,15,/,8X,8INCREMENTO NUMERO =8,15)	NOLIN 41
	GO TO 1000	
20	IF(RT-T1)12,12,30	NOLIN 70
12	WRITE(LW,10) N,IT,NI	
10	FORMAT(/,8X,8ELEMENTO NUMERO =8,15,8ATINGIU A RUTURA POR TRACAO8, NOLIN 72	
	*/,8X,8ITERACAO NUMERO =8,15,/,8X,8INCREMENTO NUMERO =8,15)	NOLIN 73
1000	IR(N)=1	NOLIN 74
	ORT(N,1)=1.E03	
	ORT(N,2)=0.	
	ORT(N,3)=1.E03	NOLIN 78
	ORT(N,4)=0.	NOLIN 79
	S(1)=D(1)*ORT(N,1)	
	S(2)=D(2)*ORT(N,3)	NOLIN 81
	GO TO 250	NOLIN 82
30	IF(IR(N).EQ.1) GO TO 1000	
	DO 19 I=1,2	NOLIN 84
	J=I*2-1	NOLIN 85
	IF(D(I)) 50,50,100	NOLIN 86
50	ORT(N,J)=R1*(2,+D(I)/EUC)	
	S(I)=R1*D(I)*(2,+D(I)/EUC)	
	GO TO 19	
100	ORT(N,J)=R2	
	S(I)=T(I)	
19	CONTINUE	NOLIN102
	IF(T1) 22,21,21	
22	XNI2=0.2	
	XNI1=XNI2*ORT(N,1)/ORT(N,3)	
	IF(XNI1.LT.0.,.OR,XNI1.GE.0.5) GO TO 21	
	ORT(N,2)=XNI1	
	ORT(N,4)=XNI2	

	GO TO 250	
21	ORT(N,2)=ORT(N,4)*ORT(N,1)/ORT(N,3)	
C ===	ANGULO DE ORTOTROPIA	NOLIN103
250	ORT(N,5)=TETA*0,017453292	
	IF(IT.NE.85) GO TO 171	
	WRITE(LW,701)	PRINC147
701	FORMAT(/,8X,8PROPRIEDADES ELASTICAS FINAIS DO MATERIAL,/,2X,8ELEM	PRINC148
	*ENTO0,5X,8E 10,12X,8NI 10,9X,8E 20,9X,8NI 20,4X,8ANG ORTO0)	
	WRITE(LW,702) (ORT(N,NS),NS=1,5)	
702	FORMAT(7X,3X,2F12,4,2X,3F12,4)	
171	SIG1=(S(1)+ORT(N,2)*S(2))/(1.-ORT(N,2)*ORT(N,4))	NOLIN105
	SIG2=(S(2)+ORT(N,4)*S(1))/(1.-ORT(N,2)*ORT(N,4))	NOLIN106
	RETURN	NOLIN107
	END	NOLIN112
	SUBROUTINE RECAL(NNO,NGL,NCC,NE,LIST,NNR,IMAT,ORT,IET,CORD,V,NTC,KRECAL	1
	*K,AG,ESP,E,IT)	RECAL 2
C ===	SUBROTINA CALCULADORA DAS REACOES DE APOIO PELAS CONDIC0ES DE	RECAL 3
C ===	EQUILIBRIO DE CADA ELEMENTO.	RECAL 4
	IMPLICIT REAL *8(A-H,O,Z)	RECAL 5
	DIMENSION NNR(70),NTC(70),AG(71),ESP(25),R(140),E(3,3),D(6),CRIG(6	RECAL 6
	*,6)	RECAL 7
	DIMENSION V(400),CORD(200,2)	
	DIMENSION ORT(300,5),LIST(300,3),IMAT(300)	
	COMMON LR,LW	RECAL 10
	NAUX=0	RECAL 11
	IS=NNO*NGL	RECAL 12
	NN=2*NCC	RECAL 13
	GO 109 N=1,NN	RECAL 14
109	R(N)=0.	RECAL 15
	DO 100 N=1,NE	RECAL 16
	DO 100 NA=1,NNO	RECAL 17
	DO 105 K=1,NCC	RECAL 18
	IF(LIST(N,NA)-NNR(K))105,104,105	RECAL 19
105	CONTINUE	RECAL 20
	GO TO 100	RECAL 21
104	IF(N-NAUX)112,113,112	RECAL 22

C ===	MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO N.	RECAL	23
112	CALL ELAST(ORT(N,1),ORT(N,2),ORT(N,3),ORT(N,4),ORT(N,5),IET,E)	RECAL	24
	IMA=IMAT(N)	RECAL	25
	ESPE=ESP(IMA)	RECAL	26
	CALL RIGID(N,LIST,CORD,E,CRIG,ESPE,AG,NNO,NCC,NNR,NGL,IS)	RECAL	27
113	DO 114 KJ=1,5,2	RECAL	28
	KJ1=(KJ+1)/2	RECAL	29
	KJ1=2*(LIST(N,KJ1)-1)+1	RECAL	30
	D(KJ)=V(KJ1)	RECAL	31
114	D(KJ+1)=V(KJ1+1)	RECAL	32
C ===	CALCULO DAS REACOES DE APOIO.	RECAL	33
	NAUX=N	RECAL	34
	NX=10** (NGL-1)	RECAL	35
	NTCA=NTC(K)	RECAL	36
	DO 108 M=1,NGL	RECAL	37
	IDA=NTCA/NX	RECAL	38
	IF(IDA)108,108,110	RECAL	39
110	NN=(K-1)*NGL+M	RECAL	40
	J=(NA-1)*NGL+M	RECAL	41
	DO 111 IA=1,IS	RECAL	42
111	R(NN)=R(NN)+CRIG(J,IA)*D(IA)	RECAL	43
	NTCA=NTCA-NX*IDA	RECAL	44
108	NX=NX/10	RECAL	45
100	CONTINUE	RECAL	46
C ===	IMPRESSAO DOS RESULTADOS.	RECAL	47
	WRITE(LW,1)KK	RECAL	48
1	FORMAT(/,5X,8REACOES DE APOIO DO CASO DE INCREMENTO NUMERO8,I3,	RECAL	49
	7X,8PONTO NOVAL8,6X,8REACAO-X8,7X,8REACAO-Y8,5X,8ANGULO8,7)	RECAL	50
	WRITE(LW,2)(NNR(K),R(2*K-1),R(2*K),AG(K),K=1,NCC)	RECAL	51
2	FORMAT(I10,F18,3,F15,3,F15,2)	RECAL	52
	RETURN	RECAL	53
	END	RECAL	54